Cognome:... Nome:...

Calcolo delle probabilità

27 ottobre 2020

Esercizio 1

Una persona tenta di collegarsi ripetutamente ad un server difettoso. La probabilità di riuscirci è, ad ogni tentativo (indipendentemente dagli altri) pari a p. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

A = "riesce a collegarsi per la I volta al 4° tentativo"

B = "la III volta che riesce a collegarsi è al 7° tentativo"

C = A∩B

D = "tra l' 11° ed il 20° tentativo (estremi compresi) si collega esattamente 5 volte"

E = "si collega per la prima volta all' h° tentativo, sapendo che si è collegata per la III volta all' $(h+k)$° tentativo". Si dia una spiegazione intuitiva di quest'ultima probabilità.

Esercizio 2

Sia (X,Y) una v.a. con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per $C > 0$

i) calcolare C

ii) calcolare la densità marginale della X

iii) calcolare la funzione di ripartizione di $X+Y$

iv) verificare che $P(X+Y<1) = 1/6$

v) ricavare la densità di $X+Y$

vi) calcolare EX^mY^n e EX

vii) calcolare la covarianza tra X e Y

ES. 1

$$P(A) = (1-p)^3 \cdot p$$

$$P(B) = \binom{6}{2} p^3 (1-p)^4$$

$$P(C) = P(A \cap B) = 2p^3 (1-p)^4$$

$$P(D) = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^5$$

$$P(E) = \frac{P(\text{I° all'}h\text{-esimo} \cap \text{III° all'}(h+k)\text{-esimo})}{P(\text{III° all'}(h+k)\text{-esimo})}$$

$$= \frac{(k-1)\cancel{p^3}\,\cancel{(1-p)^{h+k-3}}}{\binom{h+k-1}{2}\cancel{p^3}\,\cancel{(1-p)^{h+k-3}}}$$

$$= \frac{k-1}{\binom{h+k-1}{2}}$$

Infatti il denominatore è il n° di sequenze del tipo

$$(\underbrace{\overbrace{N,S,N,\dots S,N}^{2}}_{h+k-3}, \underset{\substack{\uparrow \\ h+k}}{S})$$

e il numeratore è il n° di sequenze del tipo

$$(N,N,\dots,\underset{\uparrow}{S},\underline{N,S,\dots},\underset{\uparrow}{S})$$

...ia (X, Y) una v.a. con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} C \cdot x \cdot y & 0<x<1 \\ & 0<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

...ove C

$$C \int_0^1 x\,dx \int_0^1 y\,dy = 1 \Rightarrow C = 4$$

...rginale

$$X \to f(x) = 4x \int_0^1 y\,dy = 2X \qquad 0<x<1$$

...zione di rip. somma

$$P(X+Y<w) = 4\int_0^w x\,dx \int_0^{w-x} y\,dy \qquad 0<w<1$$

$$= 1 - 4\int_{w-1}^1 x\,dx \int_{w-x}^1 y\,dy \qquad 1<w<2$$

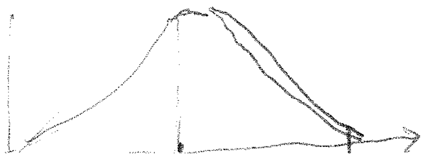
...ificare che $P(X+Y<1) = \frac{1}{6}$

...ensità

$$\frac{d}{dx} P(X+Y<w) = 4\int_0^w x(w-x)\,dx \qquad 0<w<1$$

$$= 4\int_{w-1}^1 x(w-x)\,dx \qquad 1<w<2$$

$$= \begin{cases} \frac{w^3}{3} & 0<w<1 \\ \frac{1}{3}\left(1-(w-1)^3\right) & 1<w<2 \end{cases}$$



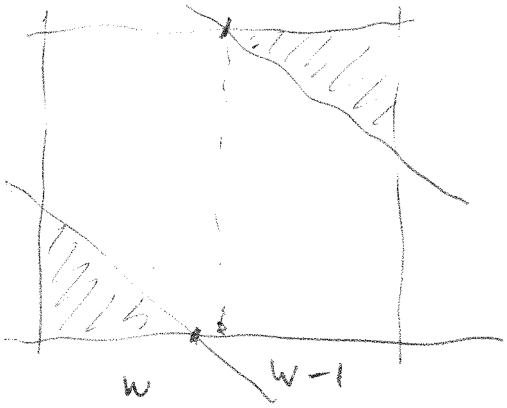
Calcolare

$$E X^m Y^n = 4\int_0^1 x^{m+1}\,dx \int_0^1 y^{n+1}\,dy = \frac{4}{(m+2)(n+2)}$$

$$E X = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = EXY - EX\cdot EY = \frac{4}{3^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = 0$$

Dettagli dei calcoli



Per la densità

$$\frac{d}{dw}\, 4\int_0^w x\,dx \int_0^{w-x} y\,dy = 4\int_0^w x(w-x)\,dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(1 - 4\int_{w-1}^1 x\,dx \int_{w-x}^1 y\,dy\right) = 4\int_{w-1}^1 x(w-x)\,dx$$