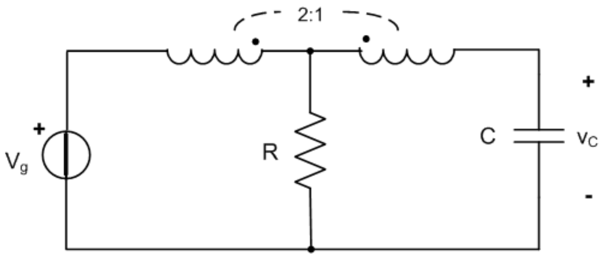
Corso di Elettrotecnica (5 CFU) – Ing. della Sicurezza e Protezione – 22 GIUGNO 2009

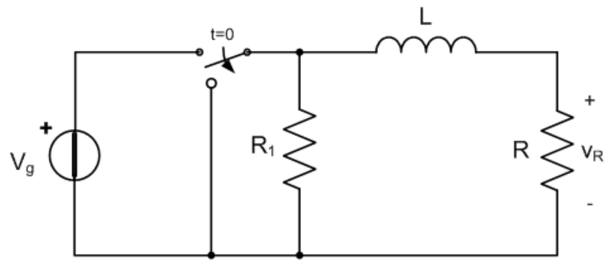
Cognome ___________________________, Nome ____________________________, Matricola____________

1. Per il circuito in figura, supposte nulle tutte le condizioni iniziali, determinare:
   - la funzione di rete $F(s) = V_C(s)/V_g(s)$, verificandone la stabilità *(10 punti)*;
   - la risposta $v_C(t)$ per $v_g(t) = u_{-1}(t)$ *(4 punti)*;
   - la risposta $v_C(t)$, se esiste, per $v_g(t) = 2\cos(4t)$ *(4 punti)*.



$R = 2\Omega,\ C = \frac{1}{2}\text{F}$

2. Per il circuito in figura, supposto in regime permanente, determinare l'andamento della tensione $v_R(t)$ per tutto l'asse dei tempi. *(12 punti)*



$R = 3\Omega,\ R_1 = \frac{7}{11}\Omega,\ \text{L=1H},\ v_g(t) = 2\cos 3t$

3. Descrivere la rappresentazione delle reti due porte tramite la matrice ammettenza di corto circuito, illustrando il significato dei parametri. *(15 punti)*

4. Descrivere il funzionamento dell'impianto di messa a terra. *(15 punti)*

Tabella delle principali Trasformate di Laplace

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$A \quad t \geq 0$	$\frac{A}{s}$
$At \quad t \geq 0$	$\frac{A}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s\sin\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$df(t)/dt$	$sF(s) - f(0)$
$\int_{-\infty}^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f(0)}{s}$
$f(t-t_1)$	$e^{-t_1 s}F(s)$
$f(t/a)$	$aF(as)$
$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$

Sviluppo in frazioni parziali - Formula dei Residui

$$F(s) = \frac{D(s)}{N(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{q} b_i s^i}{\prod_{i=1}^{p}(s-p_i)^{n_i}} = b_n + \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{A_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

$$A_{ik} = \frac{1}{(n_i-k)!}\frac{d^{(n_i-k)}}{ds^{(n_i-k)}}\left[(s-p_i)^{n_i}F(s)\right]\Big|_{s=p_i} \qquad k = 1,\ ...,\ n_i$$

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi$$

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t + \theta)$$

$$C = \sqrt{A^2+B^2}; \qquad \theta = \tan^{-1}(B/A)$$

$$\frac{A}{(s-p_i)^n} + \frac{A^*}{(s-p_i^*)^n} \leftrightarrow \frac{2|A|}{(n-1)!}e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_A)$$

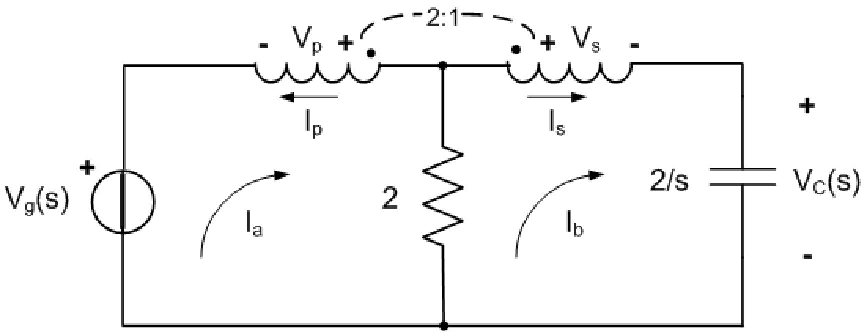
$$p_i = \sigma_i + j\omega_i$$

$$A = |A|e^{j\varphi_A}$$

Durante la prova non è possibile consultare libri-appunti, usare calcolatrici programmabili, palmari, ecc.
Non è permesso uscire dall'aula.
Questo foglio va consegnato completo di dati anagrafici anche in caso di ritiro dalla prova

1. Soluzione esercizio 1

Per la risoluzione del circuito proposto, dopo la sua trasformazione nel dominio di Laplace, è sufficiente applicare un metodo di analisi, ad esempio quello base maglie:



$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2+\frac{2}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g + V_p \\ -V_s \end{bmatrix}$$

A questo sistema di 2 equazioni in 4 incognite, vanno aggiunte le due equazioni dovute al trasformatore:

$$\begin{matrix} V_p = 2V_s \\ I_p = -\frac{1}{2} I_s \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} V_p = 2V_s \\ I_s = -2I_p \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} V_p = 2V_s \\ I_a = \frac{1}{2} I_b \end{matrix}$$

Sostituendo questi vincoli nel sistema precedente, e riordinando, si ottiene il seguente sistema risolvente:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1+\frac{2}{s} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_b \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Risolvendo rispetto alla corrente del condensatore che coincide con I_b, ottengo:

$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} V_g & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1+\frac{2}{s} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{s+4}{s}} V_g(s) = \frac{s}{s+4} V_g(s)$$

Da cui la tensione sul condensatore C è data da:

$$V_C(s) = \frac{2}{s} I_b = \frac{2}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s}}{s+4} = \frac{2}{s+4}$$

Quindi la funzione di rete cercata è la seguente:

$$\boxed{F(s) = \frac{V_C(s)}{V_g(s)} = \frac{2}{s+4}}$$

Questa funzione ha un solo polo in $s_0 = -4$, che è a parte reale negativa, e quindi il circuito è stabile.

b) Il segnale di ingresso nel dominio del tempo è un gradino $v_g(t) = u_{-1}(t)$, la cui trasformata di Laplace è semplicemente $V_g(s) = \frac{1}{s}$. La risposta cercata è quindi:

$$V_C(s) = F(s) \cdot V_g(s) = \frac{2}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$$

Dove è

$$A = sF(s)\Big|_{s=0} = \frac{2}{s+4}\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{2}$$
$$B = (s+4)F(s)\Big|_{s=-4} = \frac{2}{s}\Bigg|_{s=-4} = -\frac{1}{2}$$

Da cui ricavo

$$V_C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+4}$$

Quindi la sua antitrasformata è:

$$\boxed{v_C(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4t}\right)u_{-1}(t)}$$

c) Dato che il circuito è stabile e i poli dell'eccitazione non coincidono con i poli della funzione di rete, esiste il regime permanente e l'uscita può essere calcolata facilmente. Il fasore del generatore è $V_g = 2$ con $\omega_0 = 4$ e quindi il fasore della risposta si calcola facilmente come:

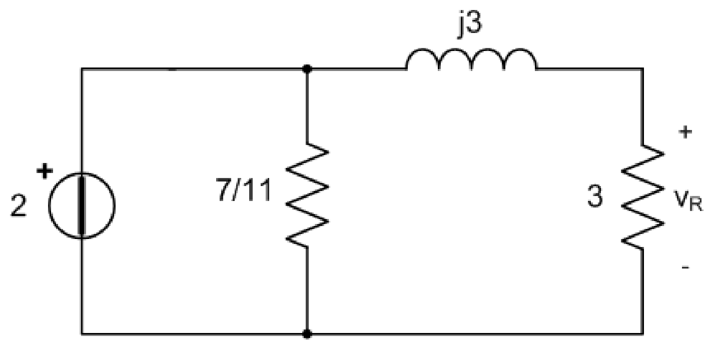
$$V_C = F(j\omega_0) \cdot V_g = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}(1+j)} = \frac{1}{2}(1-j) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Da cui, antitrasformando nel tempo, si ottiene

$$\boxed{v_C(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Soluzione esercizio 2

a) Il circuito assegnato si trova, per $t<0$, in regime permanente e quindi è possibile applicare il metodo dei fasori. Ridisegnando il circuito in questo nuovo dominio, come mostrato in Figura, è evidente che la tensione sul resistore R può essere calcolata come la partizione della tensione del generatore ideale di tensione V_g (in realtà del parallelo tra il generatore ideale di tensione V_g e del resistore R_1) tra il resistore R e l'induttore L.



Nel nostro caso il fasore del generatore è $V_g = 2$ con $\omega_0 = 3$. Si può quindi usare la regola del partitore di tensione:

$$V_R = \frac{R}{R + j\omega_0 L} \cdot V_g = 2 \cdot \frac{3}{3 + j3} = \frac{2}{1+j} = 1 - j = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Che nel tempo diviene

$$\boxed{v_R(t) = \sqrt{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

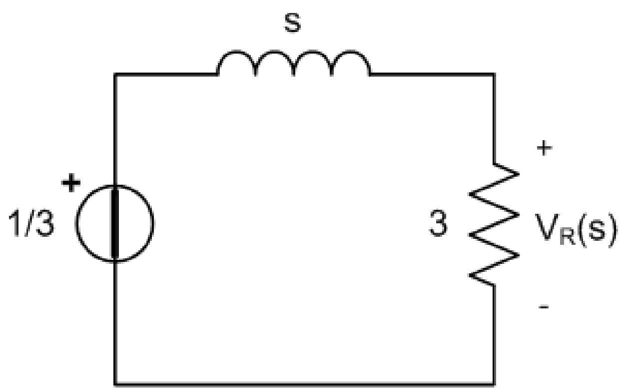
Calcoliamo ora la condizione iniziale sull'induttore L e quindi la corrente I_L:

$$I_L = \frac{V_g}{R + j\omega_0 L} = \frac{2}{3 + j3} = \frac{1}{3}(1 - j)$$

Di conseguenza, la condizione iniziale cercata, vale:

$$i_L(0^-) = \mathrm{Re}\{I_L\} = \frac{1}{3} \ [\mathrm{A}]$$

b) Ridisegniamo il circuito per $t>0$ come indicato in Figura, in cui è stato usato il modello equivalente serie dell'induttore, in cui la condizione iniziale è rappresentata dal generatore di tensione ideale di grandezza impressa pari a $Li_L(0^-)$.



In questo caso il resistore R_1 è cortocircuitato e quindi non interviene. La tensione sul resistore R può essere calcolata applicando la regola del partitore di tensione:

$$V_R(s) = Li_L(0^-)\frac{R}{R+sL} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{s+3} = \frac{1}{s+3}$$

Quindi anti trasformando nel tempo, si ottiene:

$$\boxed{v_R(t) = e^{-3t}u_{-1}(t)}$$