ES1

E' noto che la probabilità di passare lo scritto di un esame, se uno studente si è preparato bene, è pari a 0,9, mentre è solo dello 0,2 se ha una preparazione inadeguata. Inoltre il 60% degli studenti si prepara adeguatamente.

1. Calcolare la probabilità che, se passa lo scritto, la sua preparazione fosse adeguata.

2. Il docente del corso decide che, se la probabilità al punto 1 è minore del 70% all'orale farà 6 domande; se è tra il 70% e l'90% all'orale farà 4 domande, se è tra l'90% e il 100% all'orale farà 2 domande. La probabilità che lo studente risponda correttamente a ciascuna domanda di orale è pari a 0.5, indipendentemente l'una dall'altra. Calcolare la probabilità che uno studente che partecipa all'orale risponda correttamente ad almeno metà delle domande fatte.

ES2

Siano $X_1, X_2, ...X_n$ uniformi in $[0, 1]$, indipendenti.

1. Trovare la distribuzione (funzione di ripartizione) congiunta di (U, V) con

$$\begin{cases} U = X_1 \\ V = X_1 \cdot X_2 \end{cases}$$

2. Trovare la densità congiunta di (U, V)
3. Trovare la densità marginale di V dalla densità congiunta del punto 2.
4. Trovare la densità marginale di V dalla sua f.r. marginale
5. per

$$V_n = \prod_{j=1}^{n} X_i$$

   mostrare che $V_n \overset{i.m.q.}{\to} 0$

6. Cosa si può dire sulla convergenza in media r-esima di V_n?

SOLUZIONI

Es. 1

S = "supera lo scritto"

A = "preparazione è adeguata"

1) $\boxed{P(S)} = P(S|A)\,P(A) + P(S|A^c)\,P(A^c)$

$= 0{,}9 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = \boxed{0{,}62}$

2) $\boxed{P(A|S)} = \dfrac{P(S|A)\,P(A)}{P(S)} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} = \boxed{0{,}87}$

3) $n = 4 \quad p = 0{,}5 \qquad X$ = "n° domande corrette"

$\boxed{P(X \geq 2)} = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$= \binom{4}{2} \cdot 0{,}5^4 + \binom{4}{3} 0{,}5^4 + \binom{4}{4} 0{,}5^4$

$= \left[\dfrac{4!}{2!\,2!} + 4 + 1\right] \cdot 0{,}0625 = 11 \cdot 0{,}0625$

$= \boxed{0{,}687}$

Date due v.a. X_1, X_2 uniformi in $[0,1]$, indipendenti, trovare la distribuzione congiunta di

$$\begin{cases} U = X_1 \\ V = X_1 \cdot X_2 \end{cases}$$

cioè

$$Pr\{U<u, V<v\} =$$

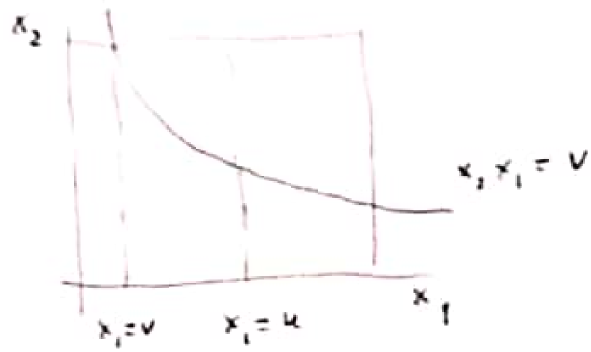
$$= Pr\{X_1<u, X_1 \cdot X_2 < v\} =$$

$$= \int_0^v dx_1 \int_0^1 dx_2 + \int_v^u dx_1 \int_0^{\frac{v}{x_1}} dx_2 =$$

$$= v + \int_v^u \frac{v}{x_1}\, dx_1 =$$

$$= v + v \lg u - v \lg v$$

per $0 < v < u < 1$



Nota che $u = v = 1$ $\quad P(U<1, V<1) = 1$

(ii) Trovare la densità $f(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P\{U<u, V<v\} = \frac{dv\, du}{u}$ $\quad 1 < v <$

(iii) Trovare la densità marginale di V.

$$\int_v^1 f(u,v)\, du = \int_v^1 \frac{du}{u} = -\lg v \qquad 0 < v < 1$$

(iv) Trovare questo risultato calcolando la f.r. di V

$$P(V<v) = 1 - \int_v^1 dx_1 \int_{\frac{v}{x_1}}^1 dx_2 = 1 - \int_v^1 \left(1 - \frac{v}{x_1}\right) dx_1$$

$$= v - v \lg v$$

e quindi

$$f(v) = -\lg v \qquad 0 < v < 1$$

(v) Per $V_n = \prod_{j=1}^{n} X_j$

mostrare che $V_n \xrightarrow{r.m.q} 0$

(vi) Che si può dire sulla convergenza i.p. di V_n ?

$$EV_n^2 = E\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = E\left(\prod_j^n X_j^2\right) = \prod_{j=1}^{n} EX_j^2 = \frac{1}{3^n}$$

(vii) Se la convergenza fosse in media r-esima con r