ES1

Un'emittente di segnali invia o la sequenza AAAA con probabilità p_1, oppure BBBB con probabilità p_2, oppure CCCC con probabilità $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Ogni lettera inviata viene ricevuta correttamente con probabilità α, indipendentemente dalle altre. Quando una lettera (ad es. A) viene ricevuta sbagliata, le due alternative (nell'esempio, B o C) sono equiprobabili. Si calcoli:

1. la probabilità che la sequenza emessa sia AAAA, avendo osservato in ricezione la sequenza ABCA.
2. la probabilità di ricevere la sequenza BBBC, se $p_1 = p_2 = 1/4$ e $\alpha = 1/2$
3. la probabilità di ricevere una sequenza contenente tre lettere B e una C (in qualunque ordine), se $p_1 = p_2 = 1/4$ e $\alpha = 1/2$

ES2

Data una variabile aleatoria Θ uniforme in $[-\pi/2, \pi/2]$ trovare le funzioni di ripartizione e di densità delle seguenti v.a.

1. $Y = \sin \Theta$
2. $Z = |\sin \Theta|$
3. $W = \sin^2 \Theta$.
4. Studiare la convergenza in distribuzione della seguente successione, per $n \to +\infty$,

$$W_n = \sin^{2n} \Theta$$

5. Calcolare il valore atteso di W_n

Es. 1

i) $$P(AAAA \mid ABCA) = \frac{P(ABCA \mid AAAA)\, P(AAAA)}{P(ABCA)}$$

$$P(ABCA) = P(ABCA \mid AAAA)\, P(AAAA) + P(ABCA \mid BBBB) \cdot P(BBBB) + P(ABCA \mid CCCC)\, P(CCCC)$$

$$= \alpha^2 (1-\alpha)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot P_1 + \cancel{\alpha (1-\alpha)^3 \frac{1}{8} P_2} + \alpha (1-\alpha)^3 \frac{1}{8} (1 - P_1 - \cancel{P_2})$$

$$= \alpha \frac{(1-\alpha)^2}{4} \left[\alpha P_1 + \frac{1-\alpha}{2} (1-P_1) \right]$$

$$\boxed{P(AAAA \mid ABCA)} = \frac{\alpha^{\cancel{2}} \cancel{\frac{(1-\alpha)^2}{4}} P_1}{\cancel{\alpha} \cancel{\frac{(1-\alpha)^2}{4}} \left[\alpha P_1 + \frac{1-\alpha}{2}(1-P_1) \right]}$$

$$= \boxed{\frac{\alpha P_1}{\alpha P_1 + \frac{1-\alpha}{2}(1-P_1)}}$$

[Verifica : per $P_1 = 1$ $\quad = 1$ OK
per $\alpha = 1$ $\quad = 1$ "]

ii) $$\boxed{P(BBBC)} = P(BBBC \mid AAAA) \cdot P_1 + P(BBBC \mid BBBB) P_2 + P(BBBC \mid CCCC)(1 - P_1 - P_2)$$

$$= (1-\alpha)^4 \cdot \frac{1}{16} P_1 + \alpha^3 \frac{(1-\alpha)}{2} P_2 + \frac{(1-\alpha)^3 \alpha}{2^3} P_3$$

$$= \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^8} = \boxed{\frac{13}{1024}}$$

iii) $\boxed{P(1C \text{ e } 3B)} = 4\, P(BBBC) = \boxed{\frac{13}{256}}$

Trovare le funzioni di ripartizione e di densità delle seguenti v.a.

(i) $Y = \sin\theta$ $\qquad\theta$ uniforme in $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\Pr\{Y < y\} = \Pr\{\sin\theta < y\} = \Pr\{-\tfrac{\pi}{2} < \theta < \arcsin y\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} d\theta = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin y\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin y \qquad -1 < y < 1$$

Per $y \to -1^+$ $\quad \arcsin y \to -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ e $\quad P(Y<y) \to 0$

$\qquad y \to 1^-$ $\quad \arcsin y \to \frac{\pi}{2}$ $\qquad P(Y<y) \to 1$

La densità di Y è

$$P(Y \in dy)/dy = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \qquad -1<y<1$$

(ii) $Z = |\sin\theta|$ $\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$ $\quad$ (unif.

$$P(Z<z) = P(|\sin\theta| < z) = \Pr\{-z < \sin\theta < z\} =$$

$$\Pr\{-\arcsin z < \theta < \arcsin z\} = 2\Pr\{\theta < \arcsin z\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\arcsin z} d\theta = \frac{2}{\pi}\arcsin z \qquad 0<z<1$$

La densità è

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \qquad 0<z<1$$

(iii) $W = \sin^2\theta$

$$P(W<w) = \Pr\{\sin^2\theta < w\} = \Pr\{-\sqrt{w} < \sin\theta < \sqrt{w}\} =$$

$$2\Pr\{0 < \theta < \arcsin\sqrt{w}\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{w}$$

Con densità $\qquad 0<w<1$

$$f(w) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2\sqrt{w}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-w}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{w(1-w)}}$$

(iv) $W_n = \sin^{2n}\theta$

$$Pr\{W_n < w\} = P(\sin^{2n}\theta < w) = P\left(-w^{\frac{1}{2n}} < \sin\theta < w^{\frac{1}{2n}}\right) = \frac{2}{\pi}$$

con densità

$$f_{W_n}(w) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\, w^{\frac{1}{2n}-1}\,\frac{1}{\sqrt{1-w^{\frac{1}{n}}}} \qquad 0<w<1$$

(v) Per $n\to\infty$ $\quad W_n \xrightarrow{i.d} L \quad$ Dire che struttura h

(vi)
$$EW_n = \int_0^1 w\,\frac{1}{n\pi}\,w^{\frac{1}{2n}-1}\,\frac{1}{\sqrt{1-w^{\frac{1}{n}}}}\,dw =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^1 w^{\frac{1}{2n}}\left(1-w^{\frac{1}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\, n y^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 y^{n-\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{n!}\,\cancel{\sqrt{\pi}}\;2^{1-2n}\,\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{(2n)!}{n!^2\,2^{2n}}$$