ES1

L'urna A ha 5 palline bianche e 5 nere, l'urna B ha 3 palline bianche e 7 nere. Si lancia un dado regolare: se esce un numero minore uguale a quattro si pescano con ripetizione 3 palline dall'urna A, altrimenti (sempre con ripetizione) 3 palline dall'urna B.

- quale è la probabilità di avere 2 bianche ed una nera?
- quale è la probabilità di aver ottenuto nel dado il numero 5, se ho 2 bianche ed una nera?

Sia X il numero di estrazioni che devo fare (sempre dalla stessa urna, dopo averla scelta col lancio del dado) per avere la prima pallina bianca. Si calcolino:

- la distribuzione di probabilità di X
- il suo valore atteso

$\left[\text{Suggerimento: si ricorda la formula seguente } \sum_{n=0}^{\infty} n a^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}\right]$

ES2

Sia Θ una v.a. uniforme in $[0, \pi]$ e sia $X = \sin \Theta$

1. Trovare la funzione di ripartizione di X
2. Trovare la funzione di densità di X
3. Trovare il valor medio di X
4. Sia ora $Y = tg\Theta$. Trovare la funzione di ripartizione di Y
5. Studiare la convergenza di $X^n = \sin^n \Theta$, per $n \to +\infty$.

Es. 1 $\quad A \begin{cases} b\ 5 \\ n\ 5 \end{cases} \qquad B \begin{cases} b\ 3 \\ n\ 7 \end{cases}$

$P(A) = P(\text{dado} \leq 4) = \frac{2}{3}$

$P(B) = \frac{1}{3}$

i) $\boxed{P(2b, 1n)} = P(2b, 1n \mid A)\, P(A) + P(2b, 1n \mid B)\, P(B)$

$$= \cancel{\binom{3}{2}}_{=3} \frac{1}{2^3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} + \cancel{\binom{3}{2}} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{63}{1000} = \boxed{0{,}313}$$

ii) $\boxed{P(\text{dado} = 5 \mid 2b, 1n)} = \dfrac{P(2b, 1n \mid 5)\, P(5)}{P(2b, 1n)}$

$$= \frac{\frac{3^3 \cdot 7}{\cancel{1000}} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{313}{\cancel{1000}}} = \frac{63}{626} = \boxed{0{,}1}$$

iii) $X =$ "n° prove per ottenere prima bianca"

$$P(X = n) = P(X = n \mid A)\, P(A) + P(X = n \mid B)\, P(B)$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} \frac{3}{10}$$

v.a. geometrica

per $n = 1, 2, \ldots$

iv) $\boxed{\mathbb{E}X} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{2^n} + \frac{1}{\cancel{3}}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\frac{\cancel{3}}{10}$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1/2)^2} + \frac{1}{10}\,\frac{1}{(3/10)^2} = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} = \frac{22}{9} = \boxed{2,4}$$

[oppure direttamente dalla formula del v.a. di una geometrica

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X|A)P(A) + \mathbb{E}(X|B)P(B)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1/2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3/10} = 2,4$$

poiché $(X|A) \sim Geom\left(\frac{1}{2}\right)$

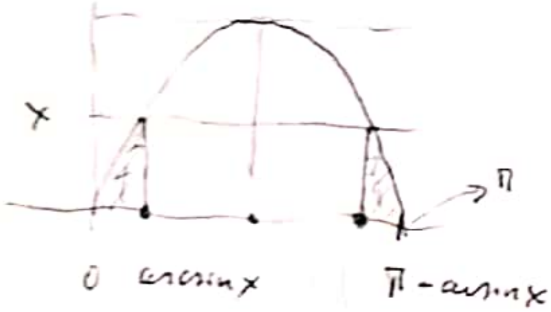
e $(X|B) \sim Geom\left(\frac{3}{10}\right)$]

Sia $X = \sin\theta$ $\qquad$ θ v.a. uniforme in $[0, \pi]$

(i) Trovare la f.r. di X

$$P\{X < x\} = P\{\sin\theta < x\} = \int_{\left\{\begin{matrix}\theta < \arcsin x \\ \theta > 0\end{matrix}\right\}} \frac{d\theta}{\pi} = \qquad 0 < x < 1$$

$< \theta$



$$\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\arcsin x} d\theta + \int_{\pi - \arcsin x}^{\pi} d\theta\right] = \frac{2}{\pi}\arcsin x \qquad 0 < x < 1$$

(ii) Trovare la densità di X

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 0 < x < 1$$

(iii) Trovare il v.m.

$$E\sin\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi}\left(-\cos\theta\right)_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

(iv) Per la v.a. $\operatorname{tg}\theta$ $\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ θ uniforme in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

trovare la f.r.

$$\ldots = \frac{1}{\pi}\int^{\arctan w} d\theta$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} w \qquad -\infty < w < +\infty$$

(vi) trovare la densità di $\operatorname{tg}\theta$

$$f(w) = \frac{1}{\pi(1+w^2)}$$

(vii) $= X^n = \sin^n\theta$

$$P(\sin^n\theta < w) = \Pr\{\sin\theta < w^{\frac{1}{n}}\} =$$

$$\frac{2}{\pi} \arcsin w^{\frac{1}{n}} \qquad 0 < w < 1$$

(viii) Per $n \to \infty$ $X^n \to$?

Per ogni $0<w<1$ $\frac{2}{\pi} \arcsin w^{\frac{1}{n}} \to \frac{2}{\pi} \arcsin 1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$

Quindi

$$P(X^n < w) \to 1 \quad \text{per } w > 0$$

$$P(X^n < w) = 0 \quad \text{per } w < 0$$

e quindi $X^n \xrightarrow{\text{i.d.}} 0$