CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 7-5-2020

E1) Un treno viaggia da Roma a Milano con dei passeggeri sia uomini che donne, in numero rispettivamente pari a u e d. Nessuno scende nelle fermate intermedie, ma ad ogni fermata si sceglie a caso un passeggero e si fa salire sul treno un numero k (valore ignoto ma fisso) di persone del suo stesso sesso. Si definisca U_n l'evento "il passeggero scelto all'n-esima fermata é un uomo". Calcolare:

i) $P(U_2)$

ii) $P(U_1 | U_2)$

iii) $P(U_n)$

commentando i risultati.

E2) Siano X e Y esponenziali indipendenti di parametro λ.
i) Si calcoli la funzione di ripartizione e la relativa funzione di densitá della v.a.

$$U = \frac{Y}{X}$$

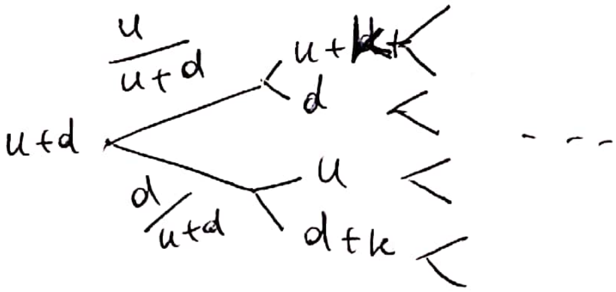
ii) Si calcoli la funzione di ripartizione e la relativa funzione di densitá della v.a.

$$V = \frac{Y}{X+Y}$$

iii) Si trovi la funzione di ripartizione di V^n e il suo limite in distribuzione, per $n \to +\infty$
iv) Si trovi la funzione di ripartizione di $V^{1/n}$ e il suo limite in distribuzione, per $n \to +\infty$

SOLUZIONI

ES. 1



i) $\boxed{P(U_2)} = \frac{u+k}{u+d+k} \cdot \frac{u}{u+d} + \frac{u}{u+d+k} \cdot \frac{d}{u+d}$

$= \cancel{\frac{u}{u+d+k}} \frac{1}{u+d} \cancel{[u+k+d]} = \boxed{\frac{u}{u+d}}$

è uguale alla proporzione iniziale ovvero a $P(U_1)$

ii) $\boxed{P(U_1 | U_2)} = \frac{P(U_2|U_1)\, \cancel{P(U_1)}}{\cancel{P(U_2)}}$

poiché $P(U_2) = P(U_1)$

$= \frac{\cancel{\frac{u}{u+d}} \cdot \frac{u+k}{u+d+k}}{\cancel{\frac{u}{u+d}}} = \boxed{\frac{u+k}{u+d+k}}$

iii) $\boxed{P(U_n) = \frac{u}{u+d}}$

$\forall n$ la prob. di estrarre un uomo è sempre costante ad ogni turno

$\boxed{\text{Es. 2}}$

i) $F_U(u) = P\left(\frac{Y}{X} < u\right) = P(Y < uX) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \lambda^2 \iint\limits_{\{(x,y):\, y<ux\}} e^{-\lambda(x+y)}\, dx\, dy \end{cases}$

per $u > 0$

$$F_U(u) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \int_0^{ux} e^{-\lambda y} dy = \lambda \int_0 e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda u x}\right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = \frac{1}{(1+u)^2} \mathbb{1}_{u>0}}$$

ii) $F_V(u) = P\left(Y < \frac{v}{1-v} X\right) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \int_0^{\frac{v}{1-v}x} e^{-\lambda y} dy\, dx$

per $0 < v < 1$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\frac{\lambda v x}{1-v}}\right) dx$$

$$= 1 - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda x}{1-v}} dx = 1 - (1-v) = v$$

$$\Rightarrow \boxed{V \sim \text{Unif}(0,1)}$$

iii) $F_{V^n}(v) = P(V^n < v) = P(V < v^{1/n}) = v^{1/n}$ per $v \in (0,1)$

$$\Rightarrow F_{V^n}(v) = \begin{cases} 0 & v \leq 0 \\ v^{1/n} & 0 < v \leq 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0 & v \leq 0 \\ 1 & v > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{V^n \xrightarrow{d} V = 0 \text{ p.c.}}$$

iv) $F_{V^{1/n}}(v) = P(V < v^n) = v^n$ per $v \in (0,1)$

$$\Rightarrow F_{V^{1/n}}(v) = \begin{cases} 0 & v \le 0 \\ v^n & 0 < v \le 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0 & v \le 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{V^{1/n} \xrightarrow{d} 1 \text{ q.c.}}$$