Cenni di algebra matriciale

Matrici e operazioni tra matrici

Matrice: tabella di numeri tra due parentesi o linee. Indicate con *lettere maiuscole in carattere grassetto* (A).
Costituita da un certo numero di righe e da un certo numero di colonne.
Variabili sulle colonne, soggetti o casi sulle righe ("*matrici Casi X Variabili*")
Elemento generico (soggetto i-esimo sulla variabile j-esima): indicato come x_{ij}: per i=2 e j=3 quindi $x_{2,3}$.

Es., con 15 righe e 3 colonne abbiamo la seguente matrice:

Matrici e operazioni tra matrici

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,1} & \mathbf{x}_{1,2} & \mathbf{x}_{1,3} \\ \mathbf{x}_{2,1} & \mathbf{x}_{2,2} & \mathbf{x}_{2,3} \\ \ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots & & \\ \mathbf{x}_{15,1} & \mathbf{x}_{15,2} & \mathbf{x}_{15,3} \end{bmatrix}$$

Matrici e operazioni tra matrici

Vettore: particolare matrice che ha una sola riga o una sola colonna.

Vettore composto da una sola colonna: x.
Vettore composto da una sola riga: x'.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

Matrici e operazioni tra matrici

***Matrice somma e differenza*. Per sommare e sottrarre due matrici è necessario che esse abbiano lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne. La matrice somma è composta da elementi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$**

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} \end{bmatrix}=C$$

Esempio numerico:

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}=C$$

Matrici e operazioni tra matrici

La matrice differenza è composta da elementi $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} \end{bmatrix} = C$$

Esempio numerico:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = C$$

Matrici e operazioni tra matrici

***Prodotto di una matrice per uno scalare*: Il risultato è una matrice in cui ogni elemento viene moltiplicato per lo scalare c (uno scalare è un singolo numero, ovvero una matrice composta da una sola riga e una sola colonna, 1x1).**

$$\mathbf{c} * \mathbf{A} = \mathbf{c} * \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c * a_{1,1} & c * a_{1,2} \\ c * a_{2,1} & c * a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Esempio numerico:

$$2 * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Matrici e operazioni tra matrici

Prodotto fra due matrici: **è possibile se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda. La matrice prodotto risultante ha tante righe quante ne ha la prima matrice (A) e tante colonne quante ne ha la seconda matrice (B).**

Esempio numerico:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*7+2*9 & 1*8+2*1 \\ 3*7+4*9 & 3*8+4*1 \\ 5*7+6*9 & 5*8+6*1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 57 & 28 \\ 89 & 46 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Matrici e operazioni tra matrici

Prodotto matriciale (o esterno): **prodotto fra un vettore *colonna* a_j ed un vettore *riga* b_k'. Dà luogo ad una matrice $C_{j,k}$ con j righe e k colonne, come nell'esempio seguente:**

$$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad b_3' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad a_2 * b_3' = \begin{bmatrix} 1*2 & 1*3 & 1*4 \\ 2*2 & 2*3 & 2*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

P*rodotto scalare (o interno):* prodotto fra un vettore riga a_i' ed un vettore colonna b_j. Il numero di righe del primo vettore deve essere uguale al numero di colonne del secondo. Il risultato sarà uno *scalare* c = $\Sigma\, a_i b_j$, come nell'esempio seguente:

$$a_3' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; a_3' * b_3 = 2*1 + 3*2 + 4*3 = 2 + 6 + 12 = 20$$

Alcune matrici caratteristiche

***Matrice trasposta*. Matrice A′ (o A^T) che si ottiene scambiando le righe con le colonne della matrice A.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Alcune matrici caratteristiche

***Matrice quadrata*. Matrice che ha tante righe quante colonne.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

***Matrice simmetrica* intorno alla diagonale principale: composta da elementi $a_{ij}=a_{ji}$. La trasposta di una matrice simmetrica è uguale alla matrice stessa.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

$a_{21}=a_{12}$

Alcune matrici caratteristiche

***Matrice diagonale*.** Ha valori diversi da zero sulla diagonale principale e valori uguali a zero al di fuori di essa.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

***Matrice identità* (I):** contiene soltanto valori 1 sulla diagonale principale e valori 0 al di fuori di essa.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alcune matrici caratteristiche

***Matrice inversa*. Definita per le matrici quadrate. Data una matrice A, la sua inversa, indicata con la notazione A^{-1}, è tale che:**

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Calcolo di una matrice inversa: piuttosto complesso.

Alcuni elementi notevoli delle matrici

***Traccia*. Sia A una matrice quadrata di ordine nXn (ovvero n righe e n colonne); la "traccia di A" è la somma degli elementi sulla sua diagonale principale: $trA = \Sigma_i \Sigma_j a_{ij}$, con i=j.**

***Determinante*. E' un numero che si ottiene effettuando la somma algebrica dei prodotti ognuno costituito da elementi appartenenti a righe e colonne diverse della matrice. In una matrice 2x2 :**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

il determinante è:

$$|A| = (a_{1,1}\, a_{2,2}) - (a_{1,2}\, a_{2,1}).$$

Se $|A| = 0$ la matrice non ha un'inversa, e si definisce "singolare".

Alcuni elementi notevoli delle matrici

Combinazione lineare. considerati p vettori $x_1, x_2, .., x_p$ di ordine n, e p numeri reali $c_1, c_2, .. c_p$, si definisce combinazione lineare dei p vettori l'espressione:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p$$

consideriamo tre vettori di ordine 2 e tre scalari 3, 4, 1.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Una combinazione lineare dei 3 vettori con i coefficienti 3, 4 e 1 si ottiene così:

$$3 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 * \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 12 - 2 \\ 6 + 4 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Un vettore che è combinazione lineare di altri vettori viene detto "linearmente dipendente".

Espressioni matriciali di indici statistici

Consideriamo la seguente matrice di dati X:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,1} & \mathbf{x}_{1,2} & \mathbf{x}_{1,3} \\ \mathbf{x}_{2,1} & \mathbf{x}_{2,2} & \mathbf{x}_{2,3} \\ \ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots & & \\ \mathbf{x}_{15,1} & \mathbf{x}_{15,2} & \mathbf{x}_{15,3} \end{bmatrix}$$

Si tratta di una matrice "casiXvariabili":
i casi sono le righe, le variabili sono le colonne.

Espressioni matriciali di indici statistici

Da X possiamo ricavare diverse altre matrici.

***Centroide*: Vettore delle medie delle variabili, avrà una riga e tre colonne:**

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{.1} & \bar{X}_{.2} & \bar{X}_{.3} \end{bmatrix}$$

con

$$\bar{X}_{.1} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_{i1}}{15} \qquad \bar{X}_{.2} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_{i2}}{15} \qquad \bar{X}_{.3} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_{i3}}{15}$$

medie calcolate su tutti i soggetti, per ogni variabile

Espressioni matriciali di indici statistici

La matrice di covarianza S (o matrice delle varianze e delle covarianze) per le tre variabili considerate ha il seguente aspetto:

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_2^2 & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_3^2 \end{bmatrix}$$

$$s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_{i1} - \bar{X}_{.1})^2}{15}$$

$$s_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_{ij} - \bar{X}_{.j})(X_{ik} - \bar{X}_{.k})}{15}$$

La matrice S è *simmetrica* intorno alla *diagonale principale*. Sulla diagonale principale: varianze (s_j^2) delle singole variabili. Fuori della diagonale: covarianze (s_{jk}) tra le variabili.

Espressioni matriciali di indici statistici

Dividendo le covarianze per le deviazioni standard delle singole variabili (come nel caso univariato) si trasforma la matrice di covarianza nella matrice di correlazione R. Infatti, per due variabili i e j:

$$r_{ij}=s_{ij}/(s_i s_j).$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_{ij}-\bar{X}_{.j})(X_{ik}-\bar{X}_{.k})/15}{s_j s_k}$$

R ha le stesse proprietà di S.

Calcoli matriciali di indici statistici

Matrice delle correlazioni

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z'Z}n^{-1} = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,1} & \ldots\ldots & z_{15,1} \\ z_{1,2} & z_{2,2} & \ldots\ldots & z_{15,2} \\ z_{1,3} & z_{2,3} & \ldots\ldots & z_{15,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & z_{2,3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{15,1} & z_{15,2} & z_{15,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/n & 0 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 0 & 1/n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i1}z_{i1}}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i1}z_{i2}}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i1}z_{i3}}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i2}z_{i1}}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i2}z_{i2}}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i2}z_{i3}}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i3}z_{i1}}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i3}z_{i2}}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i3}z_{i3}}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$$