CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
05/11/2018
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)

Cognome :	**Nome :**	**Matricola :**

$E1:$	$+E2:$	$+E3:$	$=$	$;D1:$	$+D2:$	$+D3:$	$=$	$;VOTO=$

E1) Ho un campo coltivato in cui voglio far crescere degli alberi di ciliegio. Supponiamo che ogni albero, indipendentemente dagli altri, ogni anno possa sopravvivere o morire con uguale probabilit. Inoltre, se sopravvive, pu dare origine ad una nuova pianta o no con eguale probabilit. Se chiamo Y_j il numero di alberi vivi dopo j anni, con $j = 1, 2, ...$ e suppongo di iniziare la coltivazione solo con un albero, calcolare la probabilit che

(1) dopo due anni non mi resti nessun albero e che dopo due anni me ne resti 1
(2) dopo un anno io abbia due alberi, sapendo che dopo due anni me ne resta solo 1.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Cognome:............................... Nome:...................................

N. Matricola..

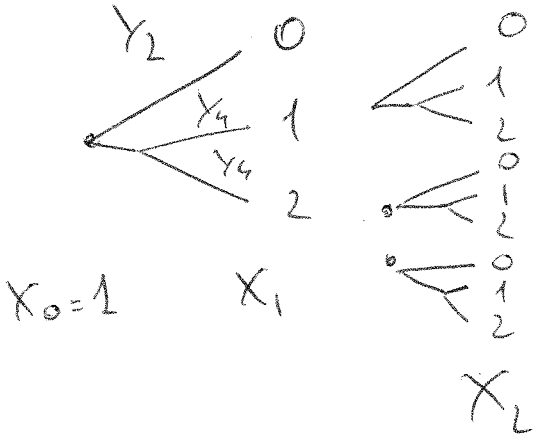
Probabilità e Laboratorio - Prof. L.Beghin

5-11-2018

Esercizio 1 Ho un campo coltivato in cui voglio far crescere degli alberi di ciliegio. Supponiamo che ogni albero, indipendentemente dagli altri, ogni anno possa sopravvivere o morire con uguale probabilità. Inoltre, se sopravvive, può dare origine ad una nuova pianta o no con eguale probabilità. Se chiamo Y_j il numero di alberi vivi dopo j anni, con $j = 1, 2, ...$ e suppongo di iniziare la coltivazione solo con un albero, calcolare la probabilità che

i) dopo due anni non mi resti nessun albero e che dopo due anni me ne resti 1

ii) dopo un anno io abbia due alberi, sapendo che dopo due anni me ne resta solo 1.



$P(X_1=0)=\frac{1}{2}$

$P(X_1=1)=\frac{1}{4}$

$P(X_1=2)=\frac{1}{4}$

$$\text{i)}\ P(X_2=0) = P\left((X_2=0)\cap \bigcup_{j=0}^{2}(X_1=j)\right)$$

$$= P(X_2=0, X_1=0) + P(X_2=0 \mid X_1=1)\,P(X_1=1) + P(X_2=0\mid X_1=2)\,P(X_1=2)$$

$$= P(X_1=0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

$$P(X_2=1) = \cancel{P(X_2=1, X_1=0)} + P(X_2=1\mid X_1=1)\,P(X_1=1) + P(X_2=1\mid X_1=2)\,P(X_1=2)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{2}{2}} = \frac{1}{8}$$

ii) $$P(X_1=2 \mid X_2=1) = \frac{P(X_2=1 \mid X_1=2)\,P(X_1=2)}{P(X_2=1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{2}{2}}}{1/8} = \frac{1}{2}$$

E2) Una v.a. X ha la seguente funzione di densit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(1-x)^{\frac{1}{\alpha}-1}, & x \in (0,1) \\ 0 \text{ altrove} & \end{cases}.$$

Si calcoli la distribuzione di probabilit della v.a.

$$Y = -\frac{\log(1-Z)}{\alpha}$$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Esercizio 2 Una v.a. X ha la seguente funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(1-x)^{\frac{1}{\alpha}-1}, & x \in (0,1) \\ 0 \text{ altrove} \end{cases} .$$

Si calcoli la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y = -\frac{\log(1-X)}{\alpha}$$

$Y \in (0, +\infty)$ p.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$$

per $\underline{y > 0}$

$$F_Y(y) = P\left(-\log\frac{(1-X)}{\alpha} < y\right)$$

$$= P(\log(1-X) > -\alpha y)$$

$$= P(1-X > e^{-\alpha y})$$

$$= P(X < 1-e^{-\alpha y})$$

$$= \int_0^{1-e^{-\alpha y}} \frac{1}{\alpha}(1-x)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dx$$

$$= -(1-x)^{\frac{1}{\alpha}}\Big]_0^{1-e^{-\alpha y}} = 1-\left(e^{-\alpha y}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= 1-e^{-y}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y \sim Exp(1)}$$

E3) Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie con funzione di densit

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2nx}{(\sqrt{n}+1)^2}, & x \in \left(0, 1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ 0 \text{ altrove} & \end{cases}.$$

Studiare la convergenza in distribuzione della successione di variabili aleatorie $\{X_n\}_{n\geq 1}$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione $X_n \in \left(0, 1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ q.c., dunque per $x \in \left(0, 1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ si ha

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \frac{2n}{(\sqrt{n}+1)^2}\int_0^x t dt = \frac{2nx^2}{(\sqrt{n}+1)^2}.$$

Dunque

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{nx^2}{(\sqrt{n}+1)^2}, & 0 \leq x < 1+\frac{1}{\sqrt{n}}, \\ 1, & x \geq 1+\frac{1}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

ossia $X_n \xrightarrow{d} X$ dove X ha funzione di ripartizione $F(x)$.

E3 ALTERNATIVO Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione statistico proveniente da una popolazione con distribuzione geometrica di parametro θ. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro θ. Supponendo di avere un campione osservato con media campionaria $\bar{x} = 0,2$ calcolare la stima di massima verosimiglianza.

Soluzione La distribuzione di probabilità di una variabile geometrica di parametro $\theta \in (0,1)$ è

$$p_\theta(x) = (1-\theta)^{x-1}\theta, \quad x = 1, 2, \ldots$$

La funzione di verosimiglianza del campione statistico è

$$l(\theta) = (1-\theta)^{s-n}\theta^n$$

dove $s = \sum_{i=1}^n x_i$. La funzione di log-verosimiglianza è

$$L(\theta) = (s-n)\log(1-\theta) + n\log\theta,$$

la cui derivata è

$$L'(\theta) = \frac{s-n}{1-\theta} + \frac{n}{\theta}.$$

Il punto $\theta^* = \frac{n}{s}$ soddisfa $L'(\theta^*) = 0$ and $L''(\theta^*) < 0$, dunque è un punto di massimo per $L(\theta)$. Lo stimatore di massima verosimiglianza è dunque

$$\Theta^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

La stima di massima verosimiglianza per il campione osservato è $\theta^* = 1/\bar{x} = 5$.

D1) Funzione di ripartizione

(1) Teorema: propriet della f.r.

(2) Calcolo delle probabilit di intervalli della retta (es. $P(X \in (a,b])$, $P(X \in [a,b), ...)$ a partire dalla f.r.

(3) Espressione della f.r. nel caso di v.a. discrete e assolutamente continue.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D2) Enunciato e dimostrazione della diseguaglianza di Chebishev.
N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D3)

(1) Dare la definizione di varianza di una variabile aleatoria. Enunciare e dimostrare le proprietà della varianza.
(2) Varianza della somma di due variabili aleatorie nel caso generale e in quello in cui le variabili aleatorie siano indipendenti.
(3) Enunciare il Teorema Limite Centrale.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.