3. Sia data la successione di v.a. $\{Y_n;\ n \geq 1\}$ definita da

$$Y_n = \frac{1}{n^\alpha}(X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n),$$

dove $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sono i.i.d. con distribuzione normale standardizzata e α è un numero reale. Trovare la distribuzione di probabilità di Y_n e discuterne il limite in distribuzione al variare di α.

---

giustificare tutti i passaggi in modo adeguato

La v.a. Y_n, combinazione lineare di variabili normali, ha distribuzione normale:

$$\boxed{Y_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)}$$

dove

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n^{2\alpha}}\left(1 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \boxed{\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^{2\alpha}}} \sim \frac{n^3}{3n^{2\alpha}} \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & \alpha < 3/2 \\ 1/3, & \alpha = 3/2 \\ 0, & \alpha > 3/2 \end{cases}$$

$n^{3-2\alpha}$

$$F_{Y_n}(y) = F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{y-0}{\sigma_n}\right) \longrightarrow \begin{cases} 1/2, & \alpha < 3/2 \\ F_{\mathcal{N}(0,1/3)}(y), & \alpha = 3/2 \\ F_0(y), & \alpha > 3/2 \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\boxed{\begin{array}{lll} Y_n \text{ non ha limite in distribuzione,} & & \alpha < 3/2 \\ Y_n \xrightarrow{\text{d}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1/3), & & \alpha = 3/2 \\ Y_n \xrightarrow[\text{p}]{\text{d}} 0, & & \alpha > 3/2 \end{array}}$$

3. Siano date le v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, indipendenti e somiglianti con distribuzione

$$P(X_n = \mathrm{e}) = P(X_n = 1/\mathrm{e}) = \frac{1}{2}.$$

E sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = (X_1 \cdot X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}.$$

Studiare la convergenza in distribuzione ~~della successione $\log Y_n$~~ e della successione Y_n.

---

giustificare tutti i passaggi in modo adeguato

$\log X_n \sim \mathrm{Unif}\{-1, 1\}$, $\mathbb{E}(\log X_n) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\log X_n) = 1$.

E le v.a. X_n sono quindi i.i.d. con media e varianza finite. Dal teorema centrale di convergenza segue che:

$$\boxed{\log Y_n = \frac{\log X_1 + \cdots + \overset{\log}{X_n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \log Y = Z \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

Poiché la convergenza in distribuzione si conserva sotto una trasformazione continua,

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y = \mathrm{e}^Z \sim F}.$$

La distribuzione limite si chiama "Lognormale(0,1)". Troviamone funz. di ripartiz. F e densità f.

$\forall y > 0,\ F(y) = P(\mathrm{e}^Z < y) = P(Z < \log y) = F_{\mathcal{N}(0,1)}(\log y)$

$$\implies f(y) = f_{\mathcal{N}(0,1)}(\log y) y^{-1} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1} \mathrm{e}^{-\log^2 y/2},\ y > 0}$$

$$\log Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log X_i - \cancel{n\mu}}{\sqrt{n\cancel{\sigma^2}}} \xrightarrow{d} \log Y = Z \sim N(0,1)$$

$$Y_n \xrightarrow{d} Y = e^Z$$

$e^Z \in (0, +\infty)$ P.C. poiché $Z \in (-\infty, +\infty)$ P.C.

$y > 0 \quad F_Y(y) = P(e^Z < y) = P(Z < \log y) = \int_{-\infty}^{\log y} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{y} \frac{e^{-\frac{(\log y)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad y > 0 \quad \text{LOG-NORMALE}$$

1. Siano $X_1, ... X_n$ v.a. indipendenti e identicamente distribuite come uniformi in $(0,1)$. Sia inoltre

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^n \left[1_{\{X_i < x\}} - x\right]}{\sqrt{n}},$$

per $x \in (0,1)$.

i) Trovare la funzione caratteristica di U_n

ii) Studiare la convergenza in distribuzione di U_n, per $n \to +\infty$.

1) $$H_{U_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{itU_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{X_i < x\}} - x\right)}\right)$$

per le prop. caratteristiche

$$= \left[\mathbb{E}\, e^{\frac{it}{\sqrt{n}} Z_i}\right]^n = \left(H_{Z_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

dove $$Z_i = 1_{\{X_i < x\}} - x = \begin{cases} 1-x & P(X_i < x) \\ -x & P(X_i \geq x) \end{cases}$$

pongo $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$

$$H_{Z_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = H_{Z_i}(u) =$$

$$= \mathbb{E}\, e^{iuZ_i} = \int_0^1 e^{iu\left(1_{x_i < x} - x\right)}\, dx_i$$

$$= \int_0^x e^{iu(1-x)}\, dx_i + \int_x^1 e^{-iux}\, dx_i$$

$$= x\, e^{iu(1-x)} + (1-x)\, e^{-iux}$$

$$\Rightarrow H_{U_n}(t) = \left[x\, e^{\frac{it}{\sqrt{n}}(1-x)} + (1-x)\, e^{-\frac{it}{\sqrt{n}}x}\right]^n$$

ii) applichiamo il TLC (verificando che valgono le ipotesi) alla successione

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n}}$$

- le Z_i sono indip. e i.d. essendo funzione delle X_i che lo sono

- $\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_i < x\}} - x\right] = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_i < x}) - \mathbb{E}(x)$

$$= P(X < x) - x$$

$$= x - x = 0$$

poiché $X_i \sim Unif(0,1)$ $\forall i$

- $V(Z_i) = \mathbb{E}(Z_i^2) = (1-x)^2 P(X < x) + x^2 P(X \geq x)$

$$= (1-x)^2 x + x^2 (1-x)$$

$$= x(1-x)[1 - \cancel{x} + \cancel{x}] = x(1-x) < \infty$$

Quindi

$$U_n = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n}\sqrt{x(1-x)}}}_{\substack{\text{per il TLC} \\ \downarrow d \; n \to +\infty \\ Z \sim N(0,1)}} \sqrt{x(1-x)} \xrightarrow{d} \sqrt{x(1-x)}\, Z$$

inoltre $\sqrt{x(1-x)}\, Z \sim N(0, x(1-x))$

$$\Rightarrow \quad U_n \xrightarrow{d} U \sim N(0, x(1-x))$$

2. Siano $X_1, ... X_n$ v.a. indipendenti e identicamente distribuite come uniformi in $(0,1)$. Sia
$$Y_n = X_1 \cdots X_n$$

i) Trovare la distribuzione di Y_n

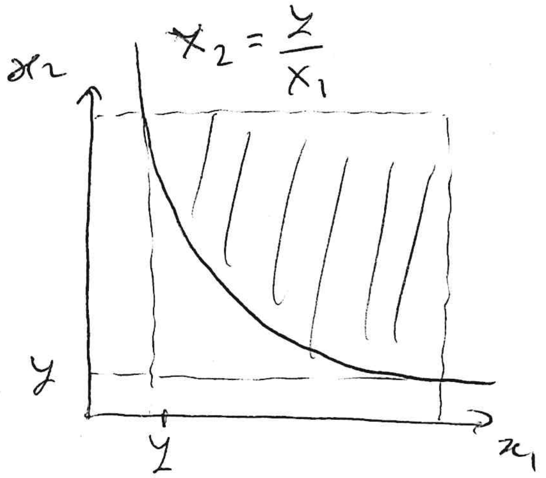
ii) Studiare la convergenza in distribuzione di Y_n, per $n \to +\infty$.

i) $Y_n \in (0,1)$ p.c.

per $n=2$ e $y \in (0,1)$

$$F_{Y_2}(y) = P(X_1 \cdot X_2 < y) = 1 - P(X_1 \cdot X_2 \geq y)$$

$$= 1 - P\left(X_2 \geq \frac{y}{X_1}\right)$$



$$= 1 - \int_y^1 \left(\int_{y/x_1}^1 dx_2 \right) dx_1$$

$$= 1 - \int_y^1 \left(1 - \frac{y}{x_1}\right) dx_1$$

$$= \cancel{1} - (\cancel{1} - y) + y \log(x_1) \Big]_y^1$$

$$= y - y \log y$$

$$\Rightarrow f_{Y_2}(y) = f_{X_1 \cdot X_2}(y) = \begin{cases} \cancel{1} - \cancel{\frac{y}{y}} - \log y = -\log y & y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per $n=3$

$$P(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 < y) = P(Y_2 \cdot X_3 < y)$$

$$= 1 - \int_y^1 \left(\int_{y/y_2}^1 f_{Y_2, X_3}(y_2, x_3)\, dx_3 \right) dy_2$$

$$= 1 + \int_y^1 \left(\int_{y/y_2}^1 \log y_2 \, d \right) dy_2$$

$$= 1 + \int_y^1 \log y_2 \left(1 - \frac{y}{y_2}\right) dy_2$$

$$= y \left[1 - \log y + \log \frac{y}{2}\right]$$

$$\Rightarrow f_{Y_3}(y) = \begin{cases} \frac{\log^2 y}{2} & y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- - -

$$\Rightarrow f_{Y_n}(y) = \begin{cases} \frac{\log^{n-1} y \, (-1)^{n-1}}{(n-1)!} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Oppure in alternativa

$$Z_n = \log Y_n = \sum_{i=1}^n \log X_i \qquad Z_n \in (-\infty, 0) \text{ p.c.}$$

$$H_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\, e^{it \sum_{i=1}^n \log X_i}$$

per la moltiplicativa

$$= \left(\mathbb{E}\, e^{it \log X_i} \right)^n$$

$$= \left[\int_0^1 e^{it \log x} dx \right]^n = \left[\int_0^1 x^{it} dx \right]$$

$$= \left[\left. \frac{x^{it+1}}{it+1} \right]_0^1 \right]^n$$

$$= \left[\frac{1}{it+1}\right]^{n}$$

Si ricorda che per una v.a. Gamma la f.c. è

$$W \sim \text{Gamma}(\lambda, \nu) \qquad H_W(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{\nu}$$

Quindi $H_{-W}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + it}\right)^{\nu}$

e perciò $H_{Z_n}(t) = \left(\frac{1}{1+it}\right)^{n}$ è la f.c. di

$Z_n = -W_n$ con $W_n \sim \text{Gamma}(1, n)$

Inoltre $Y_n = e^{Z_n} = e^{-W_n}$ e ha densità

$$f_{Y_n}(y) = f_{W_n}(-\log y) \left|\frac{d}{dy}(-\log y)\right| =$$

per il teorema sulle densità di funzioni di v.a. ass. continue

$$= \cancel{\frac{1}{y}} \, \frac{\cancel{e^{\log y}} (-\log y)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1} \log^{n-1} y}{(n-1)!}$$

per $y > 0$ e 0 altrove.

ii) Studio direttamente la convergenza in probabilità (che implica quella in distribuzione):

il candidato limite è $Y=0$ (poiché Y_n è un prodotto di numeri reali in $(0,1)$)

$$\forall \varepsilon>0 \qquad P(Y_n>\varepsilon)=P(X_1\cdots X_n>\varepsilon)$$
$$\leq P(\min(X_1\ldots X_n)<\varepsilon)$$

poiché
$\{X_1\cdots X_n>\varepsilon\}\subset\{\min(X_1\ldots X_n)<\varepsilon\}$

Quindi $P(Y_n>\varepsilon)\leq\big(P(X_j>\varepsilon)\big)^n=(1-\varepsilon)^n$

sono tutte indip. e i.d.

che tende a 0 per $\varepsilon<1$.

Per $\varepsilon>1$ $\quad P(Y_n>\varepsilon)=0$ $\quad$ poiché $Y_n\in(0,1)$ P.c.

Quindi $\quad Y_n \xrightarrow[d]{P} 0$