SOLUZIONI ESERCIZI APPELLO 15 GENNAIO 2019 - INGEGNERIA INFORMATICA

Esercizio 1
Marco e Carlo si sfidano ad un incontro a scacchi e stabiliscono che rislulterà vincitore chi tra i due vincerà due partite su tre. Supponiamo che Marco abbia probabilità p di vincere ciascuna delle due partite (indipendentemente l'una dall'altra); se però si arriva alla terza la sua probabilità di vincerla diventa p'. Calcolare

- la pronbabilità che Marco vinca l'intero incontro alla terza partita
- la probabilità che l'incontro duri tre partite dato che lo vince Marco
- il numero medio di partite disputate.

Soluzione

$$\mathbb{P}(\text{M vince al III}) = 2p(1-p)p'.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{arrivare al III}|\text{vince M}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{vince M}|\text{arrivare al III})\mathbb{P}(\text{arrivare al III})}{\mathbb{P}(\text{vince M})} \\ &= \frac{2pp'(1-p)}{p^2+2p(1-p)p'} \\ &= \frac{2p'(1-p)}{p+2p'(1-p)}.\end{aligned}$$

Sia X la variabile aleatoria 'numero di partite disputate', abbiamo che $X \in \{2,3\}$ q.c.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=2) = p^2+(1-p)^2, \\ &\mathbb{P}(X=3) = 2p(1-p).\end{aligned}$$

Infatti

$$p^2+(1-p)^2+2p(1-p) = 1.$$

Inoltre

$$\mathbb{E}(X) = 2p^2+2(1-p)^2+6p(1-p) = 2+2p(1-p).$$

Esercizio 2
Siano X e Y v.a. indipendenti ed uniformi in $[0,1]$. Si calcolino

- la seguente probabilità condizionata
$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t \,\middle|\, X+Y<1\right)$$
- la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria
$$Z = \frac{X}{X+Y}.$$

Soluzione Per $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t \,\middle|\, X+Y<1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t, X+Y<1\right)}{\mathbb{P}(X+Y<1)}$$

dove

$$\mathbb{P}(X+Y<1) = \mathbb{P}(Y<1-X) = \frac{1}{2}.$$

Per $t > 0$ si ha

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t, X+Y < 1\right) = \mathbb{P}\left(X+Y > \frac{X}{t}, X+Y<1\right) = \mathbb{P}\left(X\left(\frac{1}{t}-1\right) < Y < 1-X\right),$$

ed in particolare, per $t \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}\left(X\left(\frac{1}{t}-1\right) < Y < 1-X\right) = \frac{t}{2},$$

e dunque

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t \middle| X+Y<1\right) = \frac{\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} = t.$$

ossia per $t \in (0,1)$,

$$\left(\frac{X}{X+Y} < t \middle| X+Y<1\right) \sim \text{Unif}(0,1).$$

Mentre per $t > 1$ la probabilità è 1 e per $t < 0$ la probabilità è 0.

Inoltre per $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t\right) &= \mathbb{P}(X < tX + tY)\\ &= \mathbb{P}(X(1-t) < tY)\\ &= \mathbb{P}\left(X < \frac{t}{1-t}Y\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Y > \frac{1-t}{t}X\right)\end{aligned}$$

dove in particolare per $t \in (0,1/2)$, e quindi per $\frac{1-t}{t} > 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t\right) = \frac{t}{2(1-t)}$$

e per $t \in (1/2,1)$, e quindi per $\frac{1-t}{t} < 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t\right) = 1 - \frac{1-t}{2t} = \frac{3t-1}{2t}.$$

Se ne conclude che

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{t}{2(1-t)} & 0 < t \le 1/2, \\ \frac{3t-1}{2t} & 1/2 < t \le 1, \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti e distribuite secondo una uniforme in $(0,1)$. Studiare la convergenza in distribuzione della variabile aleatoria

$$Y_n = -\log(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}).$$

Cosa si può dire sulla convergenza in probabilità di Y_n?

Soluzione Si osservi che $Y_n \in (0,\infty)$ quasi certamente, dunque $F_{Y_n}(y) = 0$ per $y \le 0$. Inoltre per $y > 0$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n < y) &= \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > \exp(-y))\\ &= 1 - \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} < \exp(-y))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - [\mathbb{P}(X_1 < \exp(-y))]^n \\ &= 1 - \exp(-ny). \end{aligned}$$

Dunque per $n \to \infty$, si ha

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0, \\ 1 - \exp(-ny) & y > 0. \end{cases} \to F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0, \\ 1 & y > 0. \end{cases}$$

ossia $Y_n \to Y$ dove $Y = 0$ quasi certamente. E dunque $Y_n \xrightarrow{p} Y$.

Esercizio 3 Si consideri un campione $X_1, \ldots X_n$ di una legge di densità

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{7x^2}{\theta^4\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\theta^2} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

dove il parametro θ varia in $\Theta = \mathbb{R}^+$. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

Soluzione Per una osservazione $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la funzione di verosimiglianza è

$$L_\theta(x) = \left(\frac{7}{\theta^4}\right)^n \pi^{-n/2} x_1^2 \ldots x_n^2 e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/\theta^2},$$

se $x_1, \ldots, x_n > 0$ e $L_\theta(x) = 0$ altrimenti. Dunque

$$\log L_\theta(x) = -4n \log\theta - \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{\theta^2} + f(x_1, \ldots, x_n).$$

dove $f(x_1, \ldots, x_n)$ non dipende da θ. Quindi

$$\frac{d}{d\theta} \log L_\theta(x) = -4\frac{n}{\theta} + \frac{2}{\theta^3}(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Il valore in cui si annulla la derivata di $\theta \to \log L_\theta(x)$ è

$$\sqrt{\frac{2}{4n}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$$

quindi lo stimatore di massima verosimiglianza è

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{4n}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}.$$