Cognome:..**Nome:**...
Matricola:...

Sbarrare le caselle seguenti:

Data orale:...☐ 17-1-2019 .☐ 18-2-2019

☐ Recupero I esonero (I e II eserc.).............☐ Recupero II esonero (II e III eserc.)
☐ Scritto completo

PROBABILITA' E LABORATORIO
Prof. L. Beghin

15-1-2019

Esercizio n.1

In una successione di lanci indipendenti di una moneta non regolare, sia T_j l'ordine del lancio in cui esce la j-esima testa e sia N_n il numero di teste uscite in n lanci. Sia inoltre p la probabilità che esca testa in un singolo lancio. Calcolare:

i) $P(T_1 = 1, T_2 = i, T_3 = k | N_n = 3)$
ii) $P(T_1 = 1, T_2 = i | N_n = 3)$
iii) $P(T_1 = 1 | N_n = 3)$
iv) $P(N_n = 3 | T_1 = 1)$

Esercizio n.2

Siano X e Y v.a. uniformi sulla regione delimitata dalle rette $x = 0$ e $y = 1$ e dalla curva $y = x^2$
i) calcolare le densità marginali delle v.a. X e Y. Determinare se le variabili sono indipendenti
ii) calcolare la $P(\min(X, Y) = X)$
iii) calcolare la covarianza tra le due variabili

Esercizio n.3

Sia X una v.a. uniforme in $[0, 1]$ e sia

$$Y_n = \begin{cases} -\log X, & \text{con prob. } 1 - \frac{1}{n^2} \\ n^2, & \text{con prob. } \frac{1}{n^2} \end{cases} .$$

i) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, per $n \to +\infty$.
ii) Studiare la convergenza in probabilità della successione $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, per $n \to +\infty$.

Es. 1

$(T_i = r)$ = "r-esima testa all'i-esimo lancio"

N_n = "n° teste in n lanci"

i)

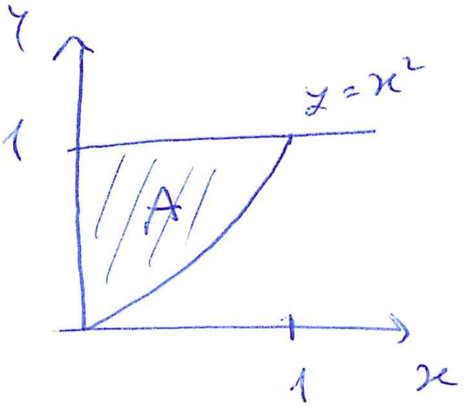
$$P(T_1 = 1, T_2 = i, T_3 = k \mid N_n = 3) = \frac{1}{\binom{n}{3}}$$

ii) $$P(T_1 = 1, T_2 = i \mid N_n = 3) = \frac{n-i}{\binom{n}{3}}$$

iii) $$P(T_1 = 1 \mid N_n = 3) = \frac{3}{n}$$

iv) $$\begin{aligned} P(N_n = 3 \mid T_1 = 1) &= P(2 \text{ teste in } (n-1) \text{ lanci}) \\ &= P(N_{n-1} = 2) \\ &= \binom{n-1}{2} p^2 (1-p)^{n-3} \end{aligned}$$

Es. 2



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}(A)} & 0<x<1,\ x^2<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \frac{3}{2}\, \mathbb{1}_{0<x<1} \cdot \mathbb{1}_{x^2<y<1}$$

poiché $$\text{Area}(A) = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy$$

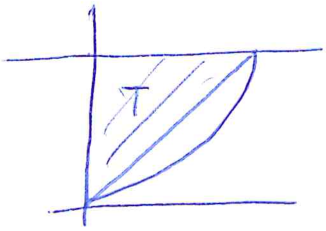
$$= \int_0^1 (1-x^2)\,dx = 1 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

i) $\boxed{f_X(x)} = \int_{x^2}^{1} \frac{3}{2}\, dy \cdot 1_{0<x<1} = \boxed{\frac{3}{2}(1-x^2)\, 1_{0<x<1}}$

$\boxed{f_Y(y)} = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{3}{2}\, dx \cdot 1_{0<y<1} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{y}\, 1_{0<y<1}}$

Quindi <u>X e Y non sono indip.</u> perché $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y$

ii) $\boxed{P(\min(X,Y) = X)}$



$= P(Y > X) = \text{Area}(T) \cdot \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$

iii) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

$\mathbb{E}(X,Y) = \frac{3}{2} \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^1 y\, dy \right) dx$

$= \frac{3}{2} \int_0^1 x \cdot \frac{y^2}{2} \Big]_{x^2}^1 dx = \frac{3}{4} \left[\int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^5\, dx \right]$

$= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}X = \frac{3}{2} \int_0^1 x(1-x^2)\, dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} \Big]_0^1 - \frac{x^4}{4} \Big]_0^1 \right]$

$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

③

$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt{y}\cdot y\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 y^{3/2}\,dy$$

$$= \frac{3}{\cancel{2}}\ \frac{y^{5/2}}{\cancel{5/2}} = \frac{3}{5}$$

$$\boxed{Cov(X,Y)} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5} = \boxed{\frac{1}{40}}$$

__ES. 3__

$Y = -\log X \in (0,+\infty)$ q.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(-\log X < y) = P(\log X > -y)$$

$$= P(X > e^{-y}) = 1 - e^{-y}$$

$\Rightarrow Y \sim Exp(1)$

$$\cancel{X}_n = \begin{cases} Y & 1 - \frac{1}{n^2} \\ n^2 & \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

i)

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y, \cancel{X}_n = Y) + P(Y_n < y, \cancel{X}_n = n^2)$$

$$= P(Y_n < y \mid \cancel{X}_n = Y)\, P(Y_n = Y) + P(Y_n < y \mid Y_n = n^2)$$

$$\cdot P(Y_n = n^2)$$

4

$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \left(1-e^{-y}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right) & 0 < y \le n^2 \\ \left(1-e^{-y}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n^2} & y > n^2 \end{cases}$$

$$F_{Y_n}(y) \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1-e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow{d} Y \sim Exp(1)}$$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|Y_n - Y| > \varepsilon) = P(Y_n = n^2) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$$\Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow{P} Y \sim Exp(1)}$$