Facoltà di Scienze Statistiche
Sapienza - Università di Roma

Calcolo delle Probabilità
Prove scritte d'esame dal 1986 al 2001

1 8.9.86 SSA-SSD

1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 1-k \le x \le 1+k, \quad k \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare i valori della costante k tali che f è la funzione di densità di una v.a. X. Calcolare $\mathrm{E}X$ e $\mathrm{Var}(X)$.

2. Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1 < x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

è una funzione di densità. Considerata una v.a. X avente tale funzione come densità, determinare la funzione di densità della v.a. $Y = X^2$.

3. Sia X una v.a. con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Posto $Y_n = X^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, verificare se e a quale v.a. converge in distribuzione la successione di v.a. Y_n.

2 19.9.86 SSA-SSD

1. Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|\,, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

è una funzione di densità e determinarne la funzione caratteristica.

2. Sia (X, Y) una v.a. doppia con funzione di densità

$$f(x,y) = \frac{k}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

(a) Determinare il valore della costante k.
(b) Determinare la funzione di ripartizione della v.a. (X, Y).
(c) Se Q è il quadrato con vertici i punti $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, calcolare $P((X,Y) \in Q)$.

3. Data la funzione $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-kx}$, $x \ge 0$, determinare i valori di k affinché essa risulti una funzione di densità.

Data una successione X_n di v.a. indipendenti e somiglianti aventi f come funzione di densità, studiare la convergenza della successione

$$Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

3 22.1.87 SSD

1. Sia U una v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Per $\alpha > 0$, consideriamo la v.a. $X = U^{1/\alpha}$. Determinare la distribuzione della v.a. X e calcolare i suoi momenti.

2. Siano $X_1, \dots, X_n$, n v.a. indipendenti e uniformi in $[0,1]$. Consideriamo le v.a. seguenti:

$$Y = \min_i \{X_i\} \quad \text{e} \quad Z = \max_i \{X_i\}.$$

Determinare le funzione di ripartizione delle v.a. Y, Z e della v.a. doppia (Y, Z); verificare se la v.a. (Y, Z) ha componenti indipendenti.

3. Due tiratori tirano, indipendentemente uno dall'altro, un colpo ciascuno sullo stesso bersaglio: la probabilità di centrare il bersaglio è 4/5 per il primo tiratore e 2/5 per il secondo.

Uno solo dei due colpi ha centrato il bersaglio: qual è la probabilità che sia del primo tiratore?

4 10.2.87 SSD

1. In una città si pubblicano 3 giornali A, B, C. Da un'indagine risulta che il 20% degli abitanti legge il giornale A, il 16% il giornale B, il 14% il giornale C; l'8% legge i giornali A e B, il 5% legge i giornali A e C, il 4% legge i giornali B e C, il 2% legge tutti e tre i giornali.

Scelta una persona a caso, qual è la probabilità che:
(a) non legga alcun giornale;
(b) legga solo un giornale;
(c) legga i giornali A e B sapendo che legge almeno un giornale.

2. Data una v.a. ϑ uniformemente distribuita nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, determinare la funzione di densità della v.a. $Y = \tan\vartheta$.

3. Una successione di v.a. X_n converge in distribuzione alla v.a. X. Un'altra successione di v.a. Y_n, indipendenti dalle X_n, converge in probabilità alla costante k. Si consideri ora la successione $Z_n = X_n + Y_n$.

Studiare la convergenza della successione Z_n e determinare l'eventuale funzione di ripartizione limite.

5 20.3.87 SSD (esercitazione scritta)

1. Nove persone salgono su un treno composto da tre vagoni e ognuna sceglie a caso il vagone su cui viaggiare. Qual è la probabilità che:
(a) vi siano tre persone nel primo vagone;
(b) vi siano tre persone in ciascun vagone;
(c) vi siano due persone in un vagone, tre in un altro e quattro nel rimanente?

2. Dato uno spazio dei risultati Ω e una σ-algebra $\mathcal{A}$ associata, e fissato un evento $A \in \mathcal{A}$, consideriamo per ogni evento $B \in \mathcal{A}$ le intersezioni

$$B' = A \cap B, \ \forall B \in \mathcal{A}.$$

Dimostrare che $\{B'\}$ è una σ-algebra.

6 27.3.87 SSD (esercitazione scritta)

1. Si lanci una moneta per sei volte. Calcolare la probabilità di ottenere più teste che croci.

2. Tre colpi vengono tirati indipendentemente su un bersaglio. La probabilità che il primo colpo vada a segno è p_1, che il secondo colpo vada a segno è p_2, che il terzo colpo vada a segno è p_3. Calcolare la probabilità che:
(a) un solo colpo centri il bersaglio;
(b) almeno un colpo centri il bersaglio.

3. Due urne contengono rispettivamente b' e b'' palline bianche e n' e n'' palline nere. Un prigioniero deve estrarre a caso due palline, secondo una delle seguenti procedure, e se entrambe le palline estratte sono bianche egli sarà libero:
(a) sceglie a caso un'urna, ne estrae una pallina, ve la rimette dentro, sceglie di nuovo a caso un'urna ed estrae di nuovo;
(b) sceglie a caso un'urna, ne estrae una pallina, ve la rimette dentro e, sempre dalla stessa urna, estrae di nuovo.
Dei due procedimenti descritti, qual è per lui più vantaggioso?

7 3.4.87 SSD (esercitazione scritta)

1. Si lancia una moneta. Se viene testa si lancia un dado e si ricevono tanti dollari quanto vale la faccia uscita; se viene croce si lanciano due dadi e si ricevono tanti dollari quanto vale la somma delle facce uscite.

Calcolare la probabilita di ricevere al più 5 dollari.

2. Siano A e B due eventi indipendenti tali che la probabilità che si verifichino contemporaneamente vale $1/6$ e quella che non se ne verifichi nessuno vale $1/3$.

Trovare $P(A)$ e $P(B)$; $P(A)$ e $P(B)$ sono determinate univocamente?

3. Supponiamo che sia p la probabilità che nasca un figlio maschio e q che nasca una femmina e siano tali eventi indipendenti per figli diversi. Una coppia desidera due figli, ma se sono dello stesso sesso insiste fino a tre, quattro, ... per avere varietà di sessi.

Qual è la probabilità di avere due figli? e tre? e quattro?... e n figli?

8 8.5.87 SSD-SSE (esercitazione scritta)

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

(a) Determinare la costante a in modo che f sia la densità di probabilità di una v.a. X.
(b) Determinare la funzione di ripartizione corrispondente.
(c) Calcolare la probabilità $P(0<X<\pi/4)$.

2. Sia X una v.a. uniforme nell'intervallo $[0,1]$. Determinare la funzione di densità e la funzione di ripartizione della v.a. $T=\mathrm{e}^X$.

3. Sia X una v.a. normale di parametri 0 e 1. Determinare la funzione di densità della v.a. $Z = X^2 + 2X$.

9 2.6.87 SSD

1. La probabilità di colpire un bersaglio con una buona carabina è 1/3, con una carabina peggiore è 1/4. Un tiratore ha a disposizione cinque carabine di cui solo una buona.

Se spara un colpo con una carabina scelta a caso, qual è la probabilità che colpisca il bersaglio?

Sapendo che il tiratore ha colpito il bersaglio, qual è la probabilità che egli abbia usato la carabina buona?

2. Una v.a. X è uniformemente distribuita nell'intervallo $(-k/2, k/2)$. Trovare la funzione di densità della v.a. $Y=a\sin(\pi X/k)$.

3. Data una v.a. X uniformemente distribuita nell'intervallo $(0,1)$, determinare, se esiste, il limite in distribuzione della successione di v.a. $Z_n=X^{1/n}$.

10 23.6.87 SSD

1. Date due v.a. X e Y, indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(0,1)$, determinare la funzione di densità della v.a.

$$Z = \frac{\max\{X,Y\}}{\min\{X,Y\}}$$

[*Suggerimento*: per calcolare la probabilità dell'evento $A=(Z<z)$,si consiglia di utilizzare la relazione $A = (A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})$.]

2. Data una v.a. X, sia Y_n una successione di v.a. cosìdefinita:

$$Y_n = \begin{cases} -n, & X\leq -n \\ X, & -n<X<n \\ n, & X\geq n \end{cases},$$

Dimostrare che la successione Y_n converge in probabilità alla v.a. X.

3. C'è un'urna contenente 6 palline bianche e 4 nere. Si lancia una moneta regolare. Se viene T si estraggono dall'urna tre palline bernoullianamente; se viene C si estraggono due palline senza reimmissione.

Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. X="numero di palline bianche estratte".

11 14.9.87 SSD

1. Tre urne, U_1, U_2, U_3, sono inizialmente vuote. Si mettono nelle urne n palline, scegliendo, indipendentemente per ciascuna pallina, una delle tre urne con probabilità uguali.

Calcolare la probabilità che:

(a) l'urna U_1 resti vuota;
(b) le urne U_1 e U_2 restino vuote;
(c) almeno una delle urne resti vuota.

2. Sia X_n una successione di v.a. discrete, indipendenti e somiglianti, aventi distribuzione di probabilità uniforme sull'insieme $\{-1, 1\}$. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = \frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{n}$$

e determinare la funzione di densità della eventuale v.a. limite.
[*Suggerimento*: si ricordi il teorema del limite centrale.]

3. Date due v.a. X e Y indipendenti e somiglianti, aventi funzione di densità esponenziale di parametro λ, calcolare la funzione di densità della v.a.

$$Z = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\}.$$

12 18.1.88 SSD

1. Un'urna contiene 100 dadi di cui 50 (cioè la metà) sono non truccati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 sia 1/2, mentre ogni altro risultato esce con probabilità 1/10.

Un dado viene estratto a caso e lanciato; indichiamo con X il risultato del lancio. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. X e calcolare EX.

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti aventi la stessa densità f così definita:

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2, & t > 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare la densità della v.a. $Z = \sqrt{XY}$.

3. Sia X_n una successione di v.a. indipendenti e somiglianti, con distribuzione esponenziale di parametro λ. Sia Y_n una successione di v.a. cosìdefinita:

$$Y_n = \frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{\log n}.$$

Studiare l'eventuale limite in distribuzione della successione Y_n.

13 4.2.88 SSD

1. Tizio si trova nella sua abitazione e deve prendere un treno che parte dalla stazione esattamente tra mezz'ora. Sotto la sua abitazione c'è la fermata di un autobus che lo porta alla stazione in 20 minuti. A 5 minuti di cammino c'è una fermata da cui passano altre due linee di autobus che lo possono portare alla stazione in 18 minuti. Tizio non conosce l'orario di passaggio degli autobus, ma sa che per ognuna delle linee gli autobus passano ogni quarto d'ora.

Quale strategia conviene seguire a Tizio per avere maggior probabilità di prendere il treno?

2. Sia X un punto aleatorio scelto a caso nell'intervallo $(0, 2)$. Calcolare la densità di probabilità dell'area del rettangolo avente lati uguali a X e $2 - X$.

3. Siano X e Y_n due v.a. indipendenti aventi rispettivamente densità

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{-y/n}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

Determinare, se esiste, il limite in distribuzione della successione $Z_n = X/Y_n$.

14 22.4.88 SSD (esercitazione scritta)

1. Un'urna contiene 80 dadi di cui 30 sono non truccati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 sia 1/2, mentre mentre ogni altro risultato esce con probabilità 1/10. Un dado viene estratto a caso e lanciato; indichiamo con X il risultato del lancio.

(a) Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. X.
(b) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte, ottenendo come risultati 2 e 3. Qual è la probabilità che si tratti di un dado truccato?

2. Un'urna contiene n palline tra rosse e nere (possono essere anche tutte rosse o tutte nere). Si aggiunge all'urna una pallina rossa e poi si estrae a caso una pallina che risulta rossa.

Qual è la probabilità che le palline dell'urna siano tutte rosse?
[*N.B.* $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.]

15 20.5.88 SSD (esonero)

1. Date due v.a. X e Y indipendenti e somiglianti aventi funzione di densità esponenziale di parametro λ, trovare la distribuzione della v.a.

$$Z = \frac{X}{\max\{X, Y\}}.$$

2. Sia X_n una v.a. avente distribuzione di Poisson di parametro n; sia Y_n una successione di v.a. cos definita:

$$Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}.$$

Dire se la successione Y_n ha limite in distribuzione ed eventualmente determinare la distribuzione limite.
[*Suggerimento*: si consiglia di studiare la successione delle funzioni caratteristiche H_{Y_n}.]

16 24.5.88 SSD (esercitazione scritta)

1. Date due v.a. X e Y indipendenti e somiglianti aventi funzione di densità esponenziale di parametro λ, trovare la funzione di densità della v.a.

$$Z = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

2. Sia X_n una successione di v.a. indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$. Determinare, se esiste, il limite in distribuzione della successione di v.a.

$$Y_n = n \max_{1 \le i \le n} \{X_i - 1\}.$$

17 2.6.88 SSD (esercitazione scritta)

1. Sia Z_n una successione di v.a. discrete tali che

$$P(Z_n{=}-n) = P(Z_n{=}+n) = \frac{1}{2n^2} \quad \text{e} \quad P(Z_n{=}0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Studiare la convergenza della successione Y_n definita da:

$$Y_n = Z_{n,1} + Z_{n,2} + \cdots + Z_{n,n},$$

dove $Z_{n,1}, Z_{n,2}, \cdots, Z_{n,n}$ sono v.a. indipendenti e somiglianti a Z_n.
[*Suggerimento*: si consiglia di usare la funzione caratteristica.]

2. Tre giocatori A, B, C lanciano, alternativamente e sempre scondo quest'ordine, un dado e vince chi per primo ottiene 6.

Il giocatore A possiede un dado regolare, mentre B e C hanno dadi con rispettivamente probabilità p_1 e p_2 di ottenere il risultato 6.

Determinare le probabilità p_A, p_B, p_C, che hanno i giocatori A, B, C di vincere il gioco e determinare per quali valori p_1 e p_2 il gioco è equo.

3. Calcolare la probabilità che l'equazione in t, $t^2 - 2Xt + Y = 0$, abbia radici complesse coniugate se i coefficienti X e Y sono v.a. indipendenti e somiglianti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, h)$, con h reale positivo.

18 30.6.88 SSD

1. Per $\lambda > 0$ e fissato, e per ogni n naturale, le vv.aa. discrete X_n sono tali che:

$$P(X_n = \frac{r\lambda}{n}) = \frac{1}{n}, \ r=1, 2, \ldots, n.$$

Trovare, se esiste, la distribuzione limite.

2. Data una scatola contenente a palline bianche e b palline nere, si estraggono due palline in blocco, si rimettono dentro e si estraggono di nuovo due palline in blocco.

Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. $X =$"numero di palline bianche ottenute in totale nelle due estrazioni".

3. Date due vv.aa. X e Y indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$, trovare la densità della v.a. Z:

$$Z = \begin{cases} X + Y, & \text{se } X + Y < 1 \\ X + Y - 1, & \text{se } X + Y \geq 1 \end{cases}$$

19 8.9.88 SSD

1. Un'urna contiene tre palline distinte dalle lettere A, B e C. Si fanno n estrazioni con ripetizione: qual è la probabilità di estrarre tutte e tre le lettere?

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti: X uniformemente distribuita in $(0, 1)$ e Y tale che $P(Y=0) = P(Y=1) = P(Y=2) = 1/3$.

Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. $Z = X + Y$.

3. Sia X una v.a. non negativa con f.r. F.

Dimostrare che $Y_n = n \log(1 + X/n) \xrightarrow{\text{d}} X$.

20 18.1.89 SSA-SSD-SSE

1. Cinque quadri vengono spediti a una galleria d'arte. Basandosi su esperienze passate, il gallerista prevede che la probabilità che tra i 5 quadri in arrivo ci siano esattamente 0,1,2,3,4,5 falsi sia .75, .10, .02, .01, .02, .10. Ricevuti i quadri, ne estrae uno a caso per farlo autenticare.

Calcolare la probabilità:
(a) che il quadro estratto sia un falso;
(b) che gli altri quattro siano dei falsi, se il quadro estratto risulta un falso.

2. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-y), & 0<x<1 \text{ e } 0<y<1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

la funzione di densità di (X,Y). Trovare la densità di $Z = XY^2$.

3. Per ogni n, siano $X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(n)}$ v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $(0,n)$. Studiare la convergenza in distribuzione di $Y_n = \min\{X_n^{(i)};\ 1\le i\le n\}$.

21 9.2.89 SSA-SSD-SSE

1. Un prigioniero è rinchiuso in una cella con tre porte. La porta A conduce a un tunnel che lo riporta nella cella dopo due giorni di lavoro; la porta B conduce a un tunnel che lo riporta nella cella dopo tre giorni di lavoro; la porta C gli ridà la libertà.

Il prigioniero sceglie la porta da utilizzare, lanciando un dado, nel seguente modo:
- se il risultato è pari sceglie la porta A;
- se il risultato è 1 sceglie la porta B;
- negli altri casi sceglie la porta C.

Se il prigioniero torna in cella, sceglie la porta tra le due non ancora provate in modo equiprobabile.

Valutare il numero medio di giorni necessari per riacquistare la libertà.

2. Sia X_n una successione di vv.aa. aventi rispettivamente densità di tipo beta con parametri r e n.

Studiare la convergenza della successione $Y_n = nX_n$.

3. Si consideri un triangolo equilatero il cui lato X è una v.a. avente distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Si determini la distribuzione dell'area di tale triangolo.

22 6.5.89 SSA-SSD (esonero)

1. Un giocatore lancia un dado regolare. Se ottiene un risultato diverso da uno si ferma subito; se ottiene uno lancia un'altra volta e continua a lanciare fino a quando ottiene un risultato diverso da uno.

Sia X la v.a. somma dei punti ottenuti nei diversi lanci; trovare la distribuzione di probabilità di X.

2. Siano X e Y due vv.aa. indipendenti e somiglianti aventi distribuzione esponenziale di parametro λ. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

23 20.5.89 SSA-SSD (esonero)

1. Le vv.aa. X e Y sono indipendenti e distribuite esponenzialmente con parametri rispettivamente a e b.

Trovare la distribuzione della somma $Z = X + Y$.

Calcolare la media della v.a. Z mediante la distribuzione ottenuta e verificare che risulta uguale a $\mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$.

2. Le vv.aa. $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ sono indipendenti e uniformemente distribuite in $(0, 1)$.

Posto $U_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $V_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, trovare la distribuzione di probabilità della v.a. $W_n = U_n V_n$ e studiare la convergenza di W_n.

24 30.5.89 SSA-SSD-SSE

1. Un'urna contiene a palline azzurre e b palline bianche. Due giocatori A e B estraggono alternativamente una pallina, cominciando da A, rimettendola ogni volta nell'urna. Il giocatore A ottiene un successo se estrae pallina azzurra, il giocatore B se estrae pallina bianca. Vince il gioco chi ottiene per primo un successo.

Determinare le probabilità di vittoria dei giocatori A e B e trovare per quali valori di a e b la probabilità di vittoria del giocatore B è maggiore di quella del giocatore A e per quali valori essa è uguale.

2. Sia (X, Y) una v.a. assolutamente continua e uniformemente distribuita nel triangolo di vertici i punti $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$. Trovare la distribuzione di probabilità delle vv.aa. $U = X + Y$ e $V = X - Y$.

3. Siano, per ogni n, $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}$, n vv.aa. indipendenti e somiglianti aventi distribuzione esponenziale di parametro n. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y_n = n \max\{X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}\} - \log n$$

e studiare la convergenza della successione Y_n.

25 26.6.89 SSA-SSD-SSE

1. Siano date due urne U_1 e U_2 contenenti la prima 3 palline bianche e due nere e la seconda 3 palline nere e due bianche. Si lancia una moneta regolare: se viene testa si effettuano estrazioni con ripetizione dall'urna U_1, se viene croce si effettuano estrazioni, sempre con ripetizione, dall'urna U_2.

Indicando con B_j l'evento "alla j-esima estrazione la pallina estratta risulta bianca", calcolare:
(a) $P(B_j)$;
(b) $P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)$;
(c) $P(U_1 \mid B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$;
(d) $\lim_{n \to +\infty} P(U_1 \mid B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$.

2. Sia X una v.a. avente distribuzione di probabilità $\mathcal{N}(0,1)$. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. $Y = |X| + 1$ e calcolare $\mathrm{E}Y$.

3. Sia $\{X_n;\ n \geq 1\}$ una successione di vv.aa. che assumono i valori $-n$ e $1/n$ rispettivamente con probabilità $1/(1+n^2)$ e $n^2/(1+n^2)$

Studiare la convergenza in distribuzione e in probabilità della successione data e vedere per quali valori di r si ha la convergenza di $\mathrm{E}(X_n)^r$.

26 15.9.89

1. Si estrae un numero intero X con distribuzione di Poisson di parametro λ; se $X = n$, si lanciano indipendentemente n monete regolari. Trovare la probabilità di avere almeno due volte testa.

2. Data una v.a. X avente la seguente funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

determinare la distribuzione di probabilità della v.a. seguente:

$$Y = \begin{cases} 2X, & \text{se } X \leq 2 \\ X^2, & \text{se } X > 2 \end{cases}$$

3. Sia X_n una successione di v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $(0,1)$. Determinare, se esiste, il limite in distribuzione della successione di v.a.:

$$Y_n = 1 - \exp[-n \min\{X_1, \ldots, X_n\}].$$

27 23.1.90 SSA-SSD-SSE

1. Da un mazzo di 40 carte si prendono solo quelle di denari e di coppe. Si estraggono, senza ripetizione, 4 carte. Calcolare la probabilità di avere:
(a) tutte carte di valore diverso;
(b) solo una coppia di carte di valore uguale;
(c) due coppie di carte di valore uguale.

2. Siano X e Y due v.a. di Poisson indipendenti di parametro λ e μ rispettivamente. Determinare la distribuzione di probabilità condizionata della X dato $X+Y=s$ e dire di che tipo di distribuzione si tratta.

3. Sia $\{X_n;\ n=1,2,\ldots\}$ una successione di v.a. indipendenti, con X_n esponenziale di parametro n. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = \log n \cdot \min\{X_1,\ldots,X_n\}.$$

28 1.3.90 SSA-SSD-SSE

1. Si lanciano indipendentemente tre dadi. Calcolare la probabilità dei tre eventi:
A=tre valori diversi,
B=coppia (di valori uguali; il terzo valore è diverso),
C=tris (tre valori uguali).

2. Siano, per ogni n, X_n e Y_n due v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro, rispettivamente, λ_n e μ_n. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z_n = \frac{X_n}{X_n+Y_n}.$$

Studiare inoltre la convergenza della successione Z_n nei due casi seguenti:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1.$$

3. Sia (X,Y) una v.a. doppia con funzione di densità:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1 \text{ e } 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare la probabilità dell'evento aleatorio $(X\le Y)$.

29 24.4.90

1. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. discreta X che assume i valori $-n,-n+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,n-1,n$, sapendo che:
(a) $P(X=k) = P(X=-k)$, $k=1,\ldots,n$,
(b) $P(|X|=k+1) = \frac{2}{3}P(|X|=k)$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

2. Determinare la funzione di ripartizione della v.a. $Z = X + 2Y$ sapendo che X e Y sono indipendenti e distribuite esponenzialmente con parametro λ.

3. Sia U una v.a. assolutamente continua con funzione di densità positiva sull'intervallo $(0, 1)$ e nulla altrove. Sia

$$V_n = \begin{cases} 0, & U < 1/2 \\ U^{1/n}, & U > 1/2 \end{cases}$$

Studiare la convergenza della successione V_n.

30 12.5.90 SSD (esonero)

1. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 3 nere si estraggono, senza ripetizione, 2 palline, che vengono messe in una seconda urna contenente 2 palline bianche ed una nera. Dalla seconda urna, cosi modificata, si estraggono, senza ripetizione, due palline. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. X, numero di palline bianche nella estrazione finale.

2. Due giocatori A e B lanciano alternativamente due dadi; comincia A. Il giocatore A vince se la somma dei due dadi è 6, il giocatore B se la somma è 7. Il gioco si arresta quando uno dei giocatori realizza il suo punteggio. Calcolare la probabilità di vittoria di ciascun giocatore.

3. Trovare la distribuzione della v.a. $Y = 1/X$, sapendo che X ha densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 + x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

31 6.6.90 SSD (esonero)

1. Date due v.a. X e Y indipendenti e somiglianti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$, trovare la distribuzione della v.a.:

$$Z = |X - Y| .$$

2. Date due v.a. X e Y indipendenti e somiglianti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$, studiare la convergenza della successione:

$$Z_n = \frac{X^n}{X^n + Y^n}.$$

32 12.6.90 SSA-SSD-SSE

1. In una successione di lanci indipendenti di una moneta non regolare, sia T_j l'ordine del lancio in cui esce la j-esima testa e sia N_n il numero di teste uscite in n lanci. Chiamando p la probabilità che esca testa e q la probabilità di croce, calcolare:
(a) $P(T_1{=}1, T_2{=}i, T_3{=}k \mid N_n{=}3)$;
(b) $P(T_1{=}1, T_2{=}i \mid N_n{=}3)$;
(c) $P(T_1{=}1 \mid N_n{=}3)$.

2. Date due v.a. X e Y indipendenti, aventi distribuzione esponenziale di parametri rispettivamente μ e λ, trovare la distribuzione della v.a.

$$Z = \frac{X+Y}{X}.$$

3. Date due v.a. X e Y indipendenti e somiglianti, aventi distribuzione esponenziale di parametro λ=1, studiare la convergenza della successione:

$$Z_n = \frac{X^{1/n}}{X^{1/n} + Y^{1/n}}.$$

33 3.7.90 SSA-SSD-SSE

1. Da un'urna, contenente n palline distinte e numerate, viene estratta a caso una pallina. Due osservatori A e B riferiscono, indipendentemente l'uno dall'altro, il numero esatto della pallina estratta con probabilità $0,1$ oppure uno errato, scelto a caso tra quelli rimasti nell'urna, con probabilità $0,9$.

Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia la numero uno dato che entrambi gli osservatori lo affermano. Studiare il limite di tale probabilità per $n \longrightarrow +\infty$ e darne una giustificazione intuitiva.
[*Suggerimento.* Si consiglia di indicare gli eventi nel modo seguente:
A_k =(l'osservatore A riferisce che è stato estratto il numero k);
B_k =(l'osservatore B riferisce che è stato estratto il numero k);
C_k =(il numero estratto è k).]

2. Due amici A e B decidono di incontrarsi alle ore 12. Il tempo di arrivo di A è X ed è uniformemente distribuito nell'intervallo [12.00, 12.15]; inoltre A decide, dopo 15 minuti di attesa, se B non arriva, di non aspettare oltre. Il tempo di arrivo di B è Y ed è uniformemente distribuito nell'intervallo [12.05, 12.20] ed inoltre decide di andare via, dopo 5 minuti di attesa, se A non arriva.

Con quale probabilità A e B si incontrano, tenendo conto che i tempi di arrivo X e Y sono indipendenti?

3. Sia X_λ una v.a. di Poisson di parametro λ e sia:

$$Z = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Dimostrare che $Z_\lambda \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1)$ quando $\lambda \longrightarrow +\infty$.
[*Suggerimento*: si consiglia di usare la f.c.]

34 11.9.90 SSA-SSD-SSE

1. In un torneo di tennis due giocatori, A e B, disputano un incontro su tre set (cioè per vincere l'incontro bisogna vincere due set). Il giocatore A ha probabilità p di vincere ciascuno dei primi due set, indipendentemente l'uno dall'altro; se però si arriva al terzo set, la sua probabilità di vincerlo è p_1.

Calcolare la probabilità che:
(a) vinca A;

(b) si arrivi al terzo set;
(c) A vinca al terzo set;
(d) l'incontro duri tre set, dato che vince A.

2. La v.a. X ha funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. Y definita da:

$$Y = \begin{cases} X^2, & \text{se } X \leq 2 \\ 5, & \text{se } X > 2 \end{cases}$$

3. Sia X una v.a. esponenziale di parametro 1. Studiare la convergenza della successione di v.a.

$$Y_n = (1 + 1/n) X^{1/n}.$$

35 18.1.91 SSA-SSD-SSE

1. Un'edicola riceve n giornali al giorno. Il numero di richieste è $X \sim$Poisson(λ).
(a) Trovare la distribuzione di probabilità del numero di giornali venduti.
(b) Se per ogni giornale venduto il giornalaio guadagna un centesimo e per ogni giornale invenduto perde b centesimi, calcolare la media del guadagno netto.

2. Calcolare la probabilità che l'equazione in t:

$$t^2 + 2Xt + Y = 0,$$

abbia soluzioni reali, sapendo che X e Y sono indipendenti e uniformemente distribuite in $(0, 1)$.

3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $(0, 1)$.
Posto $Z_n = \max_i X_i$ e $Y_n = \min_i X_i$, determinare la distribuzione congiunta della v.a. (Z_n, Y_n).
Sia poi $T_n = Z_n - Y_n$. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. T_n e studiare la convergenza della successione $\{T_n\}$ per $n \longrightarrow +\infty$.

36 21.1.91 SSA-SSD-SSE

1. Due giocatori A e B giocano nel modo seguente: alternativamente lanciano una coppia di dadi; vince chi per primo ottiene come somma 7.
(a) Se A lancia per primo, qual è la probabilità che egli vinca?
(b) Se decidono chi effettua il primo lancio lanciando una moneta regolare, qual'è la probabilità che vinca A?

2. Siano X e Y i.i.d. con densità $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}/2$, cioè con distribuzione esponenziale simmetrica.
Trovare la densità di $Z = X/Y$.

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d.$\sim \mathcal{N}(0, 1)$ e sia Y_n cosìdefinita:

$$Y_0 = \frac{X_0}{2},\ Y_1 = \frac{(X_1 + Y_0)}{2},\ Y_2 = \frac{(X_2 + Y_1)}{2}, \ldots, Y_n = \frac{(X_n + Y_{n-1})}{2}, \ldots$$

(a) Dire se le v.a. Y_n sono indipendenti.
(b) Determinare la distribuzione di probabilità di Y_n.
(c) Determinare il limite in distribuzione di $\{Y_n\}$.

37 5.2.91 SSA-SSD-SSE

1. In un ambulatorio si presentano X pazienti, dove X è una v.a. che assume i valori 1 e 2 con probabilità rispettivamente $0,4$ e $0,6$. Le durate delle visite sono v.a. Y_i, indipendenti fra loro e da X, che assumono i valori 20 min. e 30 min. con probabilità 1/2.
Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. Z, durata totale delle visite.

2. Siano X e Y v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione Espon(1).
Determinare se le due v.a.

$$U = X + Y \quad \text{e} \quad V = X/Y$$

sono indipendenti.

3. Le due v.a. X e X_t sono indipendenti e distribuite esponenzialmente, con parametro rispettivamente 1 e t.

Trovare il limite in distribuzione della v.a. $Y_t = X + X_t$, quando $t \longrightarrow 1$.

38 13.5.91 SSD (esonero)

1. Un'urna contiene a palline bianche e b palline nere. Si estrae una pallina: se essa è bianca, viene rimessa nell'urna; se invece è nera, la si sostituisce con una pallina bianca. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca dopo che l'operazione precedente è stata ripetuta tre volte.

2. Due giocatori A e B lanciano alternativamente due dadi regolari. Il giocatore A vince se come somma dei risultati dei due dadi ottiene 6, il giocatore B vince se ottiene 7, e vince il gioco colui che lo ottiene per primo.

Calcolare la probabilità di vittoria di ciascun giocatore, tenendo presente che comincia a lanciare i dadi il giocatore A.

3. Ad un gioco partecipano tre giocatori: A, B e C. Ad ogni turno uno dei giocatori fa un punto, ciascuno con probabilità 1/3. Vince chi arriva per primo a tre punti.

Ad un certo momento i giocatori A, B e C hanno rispettivamente 2, 1, 0 punti. Quali sono le loro probabilità di vittoria?

39 16.5.91 SSD (esonero)

1. Sia X una v.a. avente funzione di densità f_X . Dimostrare l'equivalenza delle seguenti condizioni:
(a) X è simmetrica rispetto all'origine; cioè la v.a. X e la v.a. $-X$ hanno la stessa funzione di densità;
(b) la v.a. $Y = |X|$ ammette funzione di densità:

$$h_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 2f_X(y), & y > 0 \end{cases}$$

2. Sia X una v.a. che assume i valori $1, 3, 5, 7, \ldots$ e sia $P(X{=}x_k) = \alpha\, P(X{=}x_{k+1})$.

Trovare la distribuzione di probabilità di X.

3. Sia X una v.a. con funzione di densità

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|},\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Determinare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = \min\{|X|\,, 1\}$$

e discutere il risultato ottenuto.

40 5.6.91 SSD (esonero)

Studiare la convergenza delle seguenti successioni di v.a.
(a) $Y_n = [\max\{X_1, \dots, X_n\}]^{n+1}$, dove le X_i sono i.i.d.$\sim$Unif$(0, 1)$.
(b) $Z_n = X^n/Y^n$, dove X e Y sono i.i.d.$\sim$Espon(1).
(c) $Z_n = X^{1/n}/Y^{1/n}$, dove X e Y sono i.i.d.$\sim$Espon(1).

41 11.6.91 SSA-SSD-SSE

1. Si ha un'urna U contenente n palline ottenute con un'estrazione bernoulliana con probabilità 1/2 tra palline bianche e nere.

Dall'urna U si estraggono con ripetizione due palline che risultano bianche. Qual è la probabilità che U contenga solo palline bianche?

2. Siano X e Y due v.a. i.i.d.$\sim$Espon(λ). Trovare la distribuzione della v.a.

$$Z = \frac{X}{\min\{X, Y\}}.$$

3. Sia $X_1, \dots, X_n, \dots$ una successione di v.a. indipendenti aventi funzione di densità

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \mathrm{e}^{-x+1}, & x > 1, \end{cases} \qquad i{=}1, 2, \dots, n, \dots$$

Studiare la convergenza della successione :

$$Y_n = [\min\{X_1, \dots, X_n\}]^n.$$

42 2.7.91 SSA-SSD-SSE

1. Tre urne A, B, C, contengono palline nere e rosse: A ne contiene due nere e quattro rosse, B otto nere e quattro rosse e C una nera e tre rosse. Da ogni urna si estrae a caso una pallina. Calcolare la probabilità che la pallina estratta da B sia nera sapendo che delle tre palline estratte due sono nere e l'altra è rossa.

2. Trovare la distribuzione della v.a.

$$Y = \sqrt{|X|},$$

sapendo che X è normale standardizzata.

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti; per ogni n, X_n ha distribuzione di Poisson di parametro n.

Studiare la convergenza della successione:

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^2}.$$

43 4.7.91 SSA

1. Siano date due urne U_1 e U_2 contenenti palline bianche e nere e siano p_1 e p_2 le probabilità di estrarre pallina bianca da U_1 e U_2 rispettivamente. Si estraggono n palline da U_1 in modo bernoulliano (con reimbussolamento) e altre n, allo stesso modo, da U_2. Le estrazioni dalle due urne siano effettuate indipendentemente.

Calcolare la probabilità che il numero di palline bianche estratte dalle due urne sia uguale. Scrivere il valore della probabilità cercata nel caso particolare in cui $p_1{=}p_2{=}1/2$.

2. Siano $X_1, \dots, X_n, \dots$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda{=}1$.
Posto

$$\nu = \inf\{k : X_1 + \cdots + X_k > 1\},$$

calcolare $P(\nu > k)$ con $k \geq 1$.

3. Siano $\{X_n;\ n \geq 1\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda{=}1$.
(a) Scrivere la funzione caratteristica della v.a.

$$Z_n = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n.$$

(b) Mostrare che la f.c. di Z_n coincide con quella della v.a.

$$Y_n = \max_{1 \leq j \leq n} X_j.$$

44 5.9.91 SSD-SSE

1. Il numero dei segnali emessi da una sorgente in un certo intervallo di tempo è una v.a. N con distribuzione di Poisson con parametro λ. I segnali emessi arrivano ad un contatore, indipendentemente tra loro e dalla v.a. N, con probabilità p.

Calcolare la distribuzione della v.a. $Y =$"numero di segnali che arrivano al contatore".

2. Dato l'intervallo $(0, 2a)$, si scelgono indipendentemente e uniformemente un punto X_1 nella prima metà dell'intervallo e un punto X_2 nella seconda metà dell'intervallo. L'intervallo viene cosìdiviso nei tre segmenti $(0, X_1)$, (X_1, X_2), $(X_2, 2a)$.

Calcolare la probabilità che i tre segmenti possano formare un triangolo (cioè che la lunghezza di ciascuno di essi sia minore della somma delle lunghezze degli altri due).

3. Sia X_n una successione di v.a. aventi rispettivamente distribuzione geometrica di parametro $p_n{=}\lambda/n$.
(a) Calcolare la funzione caratteristica della v.a. $Y_n = X_n/n$.
(b) Mostrare che la successione Y_n converge in distribuzione ad una v.a. avente distribuzione esponenziale di parametro λ.

45 10.9.91 SSA-SSE(m-z)

1. Supponiamo sia dato un mazzo di N chiavi, tutte diverse. Una di esse permette di aprire una porta e la sua ricerca è fatta provando una dopo l'altra le chiavi del mazzo scartando quelle che mostrano di non funzionare.

(a) Calcolare la probabilità che la chiave cercata si trovi al k-esimo tentativo $(1 \leq k \leq N)$.
(b) Calcolare ancora la probabilità che la chiave giusta si trovi al k-esimo tentativo nell'ipotesi che N, invece che una costante, sia una variabile binomiale di parametri n e p.

2. Sia (X, Y) una v.a. uniforme nel quadrato $(0,1) \times (0,1)$. Calcolare

$$P(X + Y > \frac{1}{2} \mid |Y - X| < \frac{1}{2}).$$

3. Sia data la successione di v.a. $\{X_n;\ n \geq 1\}$ con densità

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \dfrac{2n}{(1+nx)^3}, & x > 0 \end{cases}$$

(a) Trovare la f.r. di X_n e trovare il limite in distribuzione della successione $\{X_n;\ n \geq 1\}$.
(b) Trovare il limite in distribuzione di $Y_n = \dfrac{1}{1 + X_n}$.

46 20.1.92 SSA-SSE(m-z)

1. Dieci monete $M_1, \ldots, M_{10}$ danno T con probabilità rispettivamente $1/10, 2/10, \ldots, 10/10.$ Si estrae una moneta a caso e la si lancia. Se viene T, si estrae un numero X con distribuzione uniforme nell'intervaallo $(0,1)$. Se viene C, il numero X viene estratto dalla distribuzione uniforme in $(0,2)$.

Calcolare la distribuzione di probabilità della v.a. X.

2. Sia (X,Y) una v.a. uniforme in $(0,1)\times(0,1)$. Definiamo gli eventi

$$A = \left(\frac{Y}{X} > \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad B = \left(XY < \frac{1}{2}\right),$$

e sia Z la v.a. che assume i valori $1,2,3,4$ con le seguenti probabilità:

$$\begin{array}{ll} P(Z{=}1) = P(A\cap B), & P(Z{=}2) = P(A\cap B^c), \\ P(Z{=}3) = P(A^c\cap B), & P(Z{=}4) = P(A^c\cap B^c). \end{array}$$

Calcolare le probabilità $P(Z{=}j),\ j{=}1,2,3,4.$

3. Sia $\{X_n;\ n\geq 1\}$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione geometrica di parametro p.
(a) Calcolare la funzione caratteristica della v.a.

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathrm{E}X_k)}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X_j)}} = \frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}.$$

(b) Studiare il limite in distribuzione della successione Y_n utilizzando il risultato del punto (a).
[*Suggerimento*: si consiglia di sviluppare gli esponenziali complessi in serie di Taylor seguendo la linea della dimostrazione del teorema centrale di convergenza.]

47 21.1.92 SSD-SSE(a-l)

1. In una pagina delle bozze di un libro c'è un numero aleatorio X di errori, con distribuzione di Poisson di parametro μ. Il numero degli errori scoperti dal correttore è una v.a. Y che, per $X{=}r$, è binomiale di parametri (r,p).

Trovare la distribuzione di probabilità del numero Z di errori che restano.

2. Sia (X,Y) una v.a. doppia con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0\leq x\leq y \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

(a) Trovare la densità di X e di Y.
(b) Verificare che X e $Y-X$ sono indipendenti.

3. Sia $\{X_r;\ r{=}1,2,\ldots\}$ una successione di v.a. indipendenti, ciascuna con distribuzione di Cauchy di parametro r.

Trovare il limite in distribuzione della successione

$$Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n^2}.$$

48 10.2.92 SSA-SSE(m-z)

1. Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,1)$. Siano $X^{(1)}$ il più piccolo dei valori assunti dalle v.a. $X_1, \dots, X_n$ e $X^{(2)}$ il secondo più piccolo di tali valori.
(a) Calcolare $P(X^{(2)} \geq x)$ per $x \in \mathbb{R}$.
(b) Calcolare $P(X^{(1)} \geq x, X^{(2)} \geq y)$ con $0 < x < y < 1$.

2. Calcolare la distribuzione di

$$Y = \sin^2\left(\frac{\pi X}{2}\right),$$

dove X è una v.a. uniforme in $(0,1)$.

3. Sia data la successione di v.a. $\{Y_n;\ n \geq 1\}$ definita da

$$Y_n = \frac{1}{n^\alpha}(X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n),$$

dove $X_1, \dots, X_n, \dots$ sono i.i.d. con distribuzione normale standardizzata e α è un numero reale.

Discutere il limite in distribuzione di Y_n al variare di α.

49 13.2.92 SSA-SSD-SSE

1. Si partecipa ad una lotteria scelta a caso tra una successione di lotterie L_n con probabilità $p_n = n/2^{n+1}$; in L_n ci sono n premi equiprobabili, di valore $1, 2, \dots, n$.

Trovare la distribuzione di probabilità della vincita.

2. Dimostrare che se la v.a. X ha distribuzione di Cauchy di parametro t, anche $Y = 1/X$ ha distribuzione di Cauchy e trovare il suo parametro.

3. Tenendo conto dell'enunciato precedente, trovare il limite di :

$$Y_n = \frac{n+1}{\frac{1}{X_1} + \cdots + \frac{n}{X_n}},$$

sapendo che le v.a. $X_1, \dots, X_n, \dots$ sono indipendenti con distribuzione di Cauchy di parametro t.

50 9.4.92 SSD (esonero)

1. Da un'urna contenente 4 palline bianche e 6 nere si esrae a caso una pallina e la si rimette nell'urna assieme a un'altra pallina dello stesso colore.

Trovare la distribuzione di probabilità del numero di palline bianche nell'urna dopo aver ripetuto tre volte l'operazione.

2. Due giocatori, A e B, lanciano alternativamente un dado, cominciando da A. In ciascun lancio A vince se ottiene 1, B vince se ottiene 5 o 6.

Calcolare la probabilità di vittoria dei due giocatori.

3. Dimostrare che due eventi A e B sono indipendenti se e solo se

$$P(A \mid B) = P(A \mid B^c).$$

51 18.5.92(A) SSD (esonero)

1. Ad una ditta arrivano due ordinazioni, rispettivamente per X e Y quintali di una certa merce, dove X e Y sono v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Trovare la distribuzione della quantità globablmente richiesta.

La ditta ha in magazzino M quintali della merce e perciò può soddisfare la richiesta solo fino a tale quantità. Se si guadagnano a lire per ogni quintale venduto, e si perdono b lire per ogni quintale che resta in magazzino, qual è la distribuzione del guadagno (positivo o negativo) netto?

2. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+2y), & x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare il valore di k per il quale f è una funzione di densità.

Trovare poi la distribuzione di $Z = Y/X$, se (X, Y) ha la funzione di densità data.

52 18.5.92(B) SSD (esonero)

1. Ad un contatore Geiger arrivano un impulso all'istante X e un secondo impulso all'istante $X+Y$. Trovare la distribuzione di probabilità del numero di impulsi che arrivano nell'intervallo di tempo $(0,t)$, nell'ipotesi che X e Y siano i.i.d.$\sim$Espon(λ).

2. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} k(2x+y), & x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare il valore di k per il quale f è una funzione di densità.

Trovare poi la distribuzione di $Z = Y/X$, se (X, Y) ha la funzione di densità data.

53 29.5.92 SSD (esonero)

1. Le v.a. X e Y sono indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro λ. Studiare la convergenza di:

$$Z_n = \frac{nX}{X+nY}.$$

2. Indichiamo con $X_{r,n}$, r=$1,\ldots,n$, n v.a. indipendenti uniformemente distribuite in $(0, 1/n)$. Studiare la convergenza di

$$Y_n = X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}.$$

3. Studiare la convergenza di:

$$Y_n = n(\mathrm{e}^{X/n} - 1).$$

54 5.6.92 SSA-SSE(m-z)

1. Ci sono sette palline e tre urne. Ogni pallina viene messa a caso in una delle tre urne. Da ogni urna, tranne quella/e eventualmente vuote, viene tolta una pallina e messa in un cassetto. Calcolare la probabilità che nel cassetto:
(a) si trovi una pallina;
(b) si trovino due palline;
(c) si trovino tre palline.

2. Siano X e Y due v.a. normali standardizzate e indipendenti.
(a) Trovare la distribuzione congiunta della v.a. (U, V) definita da

$$U = Y + X \quad \text{e} \quad V = Y - X.$$

(b) Mostrare sotto quali condizioni le v.a. $W = aX + bY$ e $Z = cX + dY$ sono indipendenti.
(c) Mostrare che il risultato del punto (a) si può ottenere con calcoli immediati se si ricorda che (U, V), trasformazione lineare della v.a. normale (X, Y), è anch'essa una v.a. normale.
[*Suggerimento*: per i punti (a) e (b) può convenire usare la funzione caratteristica.]

3. Siano date le v.a. X_k indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k})$, k=1, 2, ... Trovare il limite in distribuzione di

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tan(kX_k), \;\; n{=}1, 2, \ldots .$$

[*Suggerimento*: per la funzione caratteristica H_C della distribuzione di Cauchy di parametro 1 si ha:

$$H_C(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\mathrm{e}^{iux}}{1 + x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{\pi}\, \mathrm{e}^{iu \tan y}\, dy = \mathrm{e}^{-|u|}.]$$

55 9.6.92 SSD-SSE(a-l)

1. Un ufficio deve scegliere il migliore fra tre candidati ad un posto di lavoro, i quali si presentano in ordine casuale per essere esaminati. Ogni candidato, però, deve essere accettato o rifiutato subito dopo l'esame. Calcolare la probabilità di scegliere il migliore con tre diverse strategie:
(a) prendere comunque il primo candidato;
(b) sorteggiare in anticipo il candidato da accettare, indipendentemente dall'esame;
(c) esaminare il primo senza accettarlo, poi accettare il secondo se risulta migliore del primo, altrimenti scegliere il terzo.

2. Siano X_r, r=1, 2, . . . , v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro r e sia N una v.a. indipendente dalle X_r, geometrica di parametro p. Trovare la distribuzione di probabilità di:

$$Y = X_N.$$

3. Siano X_r, $r{=}1,2,\ldots$, v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro r. Trovare il limite in distribuzione della successione:

$$Y_r = \frac{X_r}{X_{r+1}}.$$

56 6.7.92 SSA-SSE(m-z)

1. Si è incerti su quale di due teorie sia quella giusta. Chiamiamo H_i l'evento aleatorio (la teoria giusta è l'i-esima), $i{=}1,2$, e assumiamo che H_1 e H_2 siano necessari, incompatibili e a priori equiprobabili.

Vengono eseguiti n esperimenti: ogni esperimento fornisce evidenza a favore di H_1 o di H_2. Condizionatamente ad H_i, la v.a. N_i =“numero di esperimenti favorevoli ad H_i” segue la distribuzione binomiale di parametri (n, ϑ_i), $i{=}1,2$.
(a) Trovare la distribuzione di probabilità, non condizionata, della v.a. N_1.
(b) Avendo ottenuto $N_1{=}k$, calcolare la probabilità a posteriori di H_1.
(c) Quale condizione devono verificare ϑ_1 e ϑ_2 affinché le probabilità a priori e a posteriori di H_1 siano uguali? È vero che, in questo caso, la distribuzione di cui al punto (a) è $\mathrm{Binom}(n, \vartheta_1)$?

2. Sia (X, Y) una v.a. doppia con funzione di densità

$$f(x, y) = k(x + y),\ \ 0{<}x{<}1 \text{ e } 0{<}y{<}1.$$

Le v.a. X e Y sono indipendenti? Determinare inoltre k e la distribuzione di probabilità della v.a. $X + Y$.

3. Siano date le v.a. $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ indipendenti e somiglianti con distribuzione

$$P(\xi_i{=}z) = P(\xi_i{=}\tfrac{1}{z}) = \frac{1}{2},\ \ z{>}1.$$

Trovare il limite, per $n \longrightarrow +\infty$, della media e della varianza della v.a.

$$\eta_n = (\xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n)^{1/\sqrt{n}}.$$

57 7.7.92 SSD-SSE(a-l)

1. In una bisca in cui sono presenti n persone, Tizio ha una banconota falsa. La dà, con una scelta casuale, ad una delle altre persone, che a sua volta la dà ad un altro, e così via. Indichiamo con p_r la probabilità che dopo r passaggi la banconota si trovi in mano a Tizio.

Calcolare p_r per $r{=}1,2,3,4$. Trovare l'espressione di p_r per r intero positivo qualsiasi, e il limite di p_r per $r \longrightarrow +\infty$.

2. Considerate la v.a. (X, Y) avente funzione di densità:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y+2)}, & x > -1,\ y > -1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare le distribuzioni delle v.a. componenti X e Y e vedere se sono indipendenti. Calcolare la distribuzione di $Z = X + Y$.

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, le v.a. $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ sono indipendenti ed esponenziali di parametro $1/n$. Trovare la funzione caratteristica di

$$Y_n = \frac{X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}}{n^2}$$

e il limite di Y_n per $n \longrightarrow +\infty$.

58 10.9.92 SSD-SSE(a-l)

1. Ci sono delle urne U_r, $r{=}1, 2, \dots, n$, contenenti ciascuna n palline, di cui r bianche. Si sceglie una delle urne, con probabilità p_r inversamente proporzionali ai valori r, e da questa si estraggono con ripetizione due palline, le quali risultano bianche.

Qual è la probabilità che si tratti dell'urna contenente tutte palline bianche?

2. In una bisca in cui sono presenti n persone, Tizio ha una banconota falsa. La dà, con una scelta casuale, ad una delle altre persone, che a sua volta la dà ad un altro, sempre con una scelta casuale, e così via. Dopo un numero aleatorio X di passaggi, la banconota ritorna per la prima volta in mano a Tizio.

Trovare la distribuzione di probabilità di X.

3. Le v.a. X e Y_λ sono indipendenti ed esponenziali con parametro rispettivamente 1 e λ. Trovare il limite in distribuzione di

$$Z_\lambda = \frac{1}{X + Y_\lambda}$$

per $\lambda \longrightarrow 0$ e per $\lambda \longrightarrow +\infty$.

59 14.9.92 SSA-SSE(m-z)

1. Cento carte sono numerate progressivamente con i numeri $00, 01, \dots, 98, 99$. Se ne sceglie una a caso. Sia X la somma delle due cifre che compaiono sulla carta estratta e Y il loro prodotto.

Calcolare $P(X{=}i \mid Y{=}0)$ per $i{=}0, 1, \dots, 9$.

2. In uno schema di Bernoulli con probabilità p, sia ν_k la v.a. che indica l'ordine della prova nella quale si verifica il k-esimo successo.
(a) Trovare $P(\nu_1{=}i, \nu_{k-1}{=}r, \nu_k{=}j)$ per $i \geq 1$, $r \geq i{+}k{-}2$, $j \geq r{+}1$.
(b) Verificare che la somma delle probabilità di cui al punto (a), al variare degli indici i, r e j come indicato, vale uno. Si ricorda (distr. binomiale negativa) che

$$\sum_{h=k}^{+\infty} \binom{h-1}{k-1} p^k q^{h-k} = 1.$$

3. Siano date, per ogni n naturale, n v.a. $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$, indipendenti e somiglianti con distribuzione

$$P(\xi_i^{(n)} = -\, n^{1/3}) = P(\xi_i^{(n)} = n^{1/3}) = \frac{1}{2n^{2/3}} \quad \text{e} \quad P(\xi_i^{(n)} = 0) = 1 - \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Calcolare media e varianza di $\xi_i^{(n)}$ e trovare la distribuzione limite di

$$\alpha_n = \frac{\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \cdots + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{n}}.$$

60 20.1.93 SSA-SSE(m-z)

1. Ogni individuo appartiene ad uno dei quattro gruppi sanguigni O, A, B, AB. In una popolazione le frequenze dei quattro gruppi sono rispettivamente p_O, p_A, p_B, p_{AB}. Per poter fare una trasfusione di sangue da un donatore a un ricevente bisogna seguire queste regole: O può ricevere solo da O; A può ricevere da O e da A; B può ricevere da O e da B; AB può ricevere da O, da A, da B e da AB. Si dice anche che il gruppo O (si legge "zero") è donatore universale e il gruppo AB è ricevente universale.

Si estraggono a caso un donatore e un ricevente. Calcolare

(a) la probabilità che la trasfusione sia possibile e

(b) la probabilità che il ricevente sia di gruppo AB sapendo che la trasfusione è possibile.

2. Studiare, al variare del parametro reale α, il valor medio della v.a.

$$Y = X(1 - \mathrm{e}^{-\alpha X}),$$

dove X è una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro uno.

3. Per ogni n naturale, sia

$$Y_n = n^{X_n},$$

dove X_n segue la distribuzione esponenziale di parametro n.

(a) Trovare il limite in distribuzione di Y_n.

(b) Calcolare, $\forall k > 0$, $\mathrm{E}Y_n^k$ e discuterne il limite per $n \longrightarrow +\infty$.

61 21.1.93 SSD-SSE(a-l)

1. In una successione bernoulliana di lanci di una stessa moneta, che nel singolo lancio dà testa con probabilità p, calcolare la probabilità che la sequenza testa-croce compaia, per la prima volta, nei lanci $n-1$ ed n.

2. Data la v.a. X uniforme in $(0, 1)$, calcolare la densità di $Y = -\dfrac{1}{\alpha}\log(1 - X)$, con $\alpha > 0$.

3. Sia $\{X_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ una successione di v.a. indipendenti con f.r.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^n, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

e sia Y una v.a. indipendente dalle X_n con f.r.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y^2, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

Determinare il limite in distribuzione della successione $\{X_n + Y;\ n=1, 2, \ldots\}$ e stabilire se si ha anche la convergenza in probabilità.

62 9.2.93 SSD-SSE(a-l)

1. Una scatola contiene due monete, A e B. La moneta B ha entrambe le facce uguali a T. Viene scelta a caso una moneta e lanciata n volte. Calcolare la probabilità di avere k volte T, con $0 \le k \le n$, nell'ipotesi che per la moneta A si abbia:
(a) $P(T) = P(C) = 1/2$;
(b) $P(T) = p$, $P(C) = q$.

2. Siano X e Y v.a. indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.:

$$Z = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

3. Date le v.a. indipendenti X, esponenziale di parametro λ, e Y_n, di Poisson di parametro $1/n$, studiare la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{X}{1 + Y_n}.$$

63 10.2.93 SSA-SSE(m-z)

1. L'urna U_1 contiene 1 pallina bianca e 2 nere; l'urna U_2 ne contiene 2 bianche e 3 nere. Si estraggono a caso, senza ripetizione, 2 palline dall'urna U_1 e 2 dall'urna U_2. Le 4 palline così estratte vengono messe in una terza urna U_3, inizialmente vuota. Si estrae a caso una pallina da U_3: qual è la probabilità che essa sia bianca?

2. Dal segmento di estremi 0 e a si estrae a caso, con distribuzione uniforme, un punto di ascissa aleatoria X. Tale punto divide il segmento $(0, a)$ in due segmenti.
(a) Scelto a caso (per esempio lanciando una moneta bilanciata) uno dei due segmenti, trovare la distribuzione di probabilità della v.a. $Z =$"lunghezza del segmento scelto."
(b) (*facoltativo*) Supponiamo che la scelta fra i due segmenti si faccia invece al modo seguente: si sceglie il segmento $(0, X)$ se $Y \in (0, X)$ e il segmento (X, a) altrimenti, dove Y è una v.a. uniforme in $(0, a)$ ed indipendente da X. Cambia la distribuzione di cui al punto (a)?

3. (a) Per ogni t reale positivo, X_t è una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro t e $Y_t = t(X_t - t)$. Studiare la convergenza, al tendere di t a $+\infty$, della funzione di ripartizione di Y_t condizionata all'evento $(X_t > t)$.
(b) (*facoltativo*) Come il punto (a) con la differenza che ora X_t è una v.a. normale standardizzata.

64 22.4.93 SSD (esonero)

1. Ci sono n palline $(n \ge 3)$ e tre urne U_1, U_2, U_3. Ogni pallina viene messa a caso in una delle tre urne. Da ogni urna, se non vuota, viene estratta una pallina e messa in un cassetto. Calcolare la probabilità che il cassetto contenga una, due, tre palline.

2. Data una v.a. X, con funzione di densità esponenziale di parametro 1, trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y = \frac{1}{\log X}.$$

65 29.4.93 SSD (esonero)

1. Una persona ha due scatole di fiammiferi, contenenti ciascuna n fiammiferi. Quando gli serve un fiammifero lo prende da una scatola scelta a caso.

Calcolare la probabilità che quando si vuota una scatola l'altra contenga r fiammiferi (r=$1, 2, \ldots, n$).
[*Suggerimento*: tenere presente che, perché restino r fiammiferi in una scatola quando l'altra si vuota, prima dell'utilizzazione dell'ultimo fiammifero nelle due scatole ci devono essere rispettivamente 1 e r fiammiferi.]

2. Si abbia una scatola contenente $N+1$ palline contrassegnate con i numeri interi da 0 a N, dove N è una v.a. con distribuzione di Poisson di parametro μ. Da questa scatola estraiamo a caso una pallina.

Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia quella contrassegnata con il numero 0.

3. Data la v.a. X distribuita uniformemente nell'intervallo $(-1, 1)$, trovare la distribuzione della v.a.

$$Y = \mathrm{e}^{1/X}.$$

66 31.5.93 SSD (esonero)

1. Siano X e Y due v.a. indipendenti uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$. Trovare la distribuzione di probabilità di

$$Z = \left| \frac{X+Y}{X-Y} \right|.$$

2. Date le v.a. $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$, indipendenti e distribuite esponenzialmente tutte con parametro n, studiare la convergenza della successione di v.a.

$$Y_n = X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}.$$

3. La v.a. X sia distribuita uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$. Studiare la convergenza di

$$Y_n = n\left(X^{1/n} - 1\right).$$

67 7.6.93 SSD-SSE(a-l)

1. L'urna U_1 contiene 1 pallina bianca e $2n-1$ nere, l'urna U_2 contiene $2n-1$ palline bianche e 1 nera, l'urna U_3 contiene n palline bianche e n palline nere. Si trasferisce una pallina, scelta a caso, dall'urna U_1 all'urna U_2, quindi una pallina dall'urna U_2 all'urna U_3, e infine una pallina dall'urna U_3 all'urna U_1.

Calcolare la probabilità:

(a) che la composizione delle tre urne resti invariata;
(b) che la composizione di una sola urna resti invariata;
(c) che la composizione di due urne sole resti invariata;
(d) di avere solo un'urna con palline dello stesso colore;
(e) di avere due urne con palline dello stesso colore.

2. Data la v.a. X, distribuita uniformemente nell'intervallo $(0,2)$, trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y = \frac{X}{|X-1|}.$$

3. Date le v.a. $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$, indipendenti, tali che $P(X_{i,n}{=}1/n) = P(X_{i,n}{=}-1/n) = 1/2$, $i{=}1,2,\ldots,n$, studiare la convergenza della successione di v.a.

$$Y_n = X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}.$$

68 8.6.93 SSA-SSE(m-z)

1. Errori nella trasmissione di segnali. Un'emittente invia o la sequenza $AAAA$, con probabilità p_1, o la sequenza $BBBB$, con probabilità p_2, o la sequenza $CCCC$, con probabilità $p_3{=}1{-}p_1{-}p_2$. Ogni lettera viene ricevuta giusta con probabilità α, indipendentemente dalle altre. Quando una lettera (per es. B) viene ricevuta sbagliata, le due alternative (nell'es. A e C) sono equiprobabili.

Calcolare la probabilità che la sequenza emessa sia $AAAA$ avendo osservato in ricezione la sequenza $ABCA$.

2. Sia (X,Y) una v.a. doppia uniformemente distribuita nel cerchio unitario (centro l'origine e raggio uno). Calcolare

$$P\left(\max\{|X|\,,|Y|\} < \frac{1}{2\sqrt{2}} \;\mid\; \sqrt{X^2+Y^2} < \frac{1}{2}\right).$$

3. Siano X e Y indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,1)$ e sia, per ogni n naturale,

$$Z_n = \frac{nX}{nX+Y}.$$

Trovare la distribuzione di probabilità di Z_n e studiare la convergenza della successione Z_n.

69 2.7.93 SSD-SSE(a-l)

1. In un parcheggio ci sono n posti in fila. Arrivano tre automobili, ciascuna delle quali sceglie a caso uno dei posti liberi. Per $n{=}5$, qual è la probabilità che due macchine risultino vicine e l'altra staccata di almeno un posto? E per $n{>}5$?

2. Due persone, A e B, arrivano dal medico rispettivamente agli istanti aleatori X e Y, indipendenti e uniformemente distribuiti fra mezzogiorno e l'una. La visita di A dura 20 minuti.

Sia Z la durata dell'attesa di B (che ovviamente può essere anche nulla). Trovare la distribuzione di Z.

3. Siano X_n ed Y_n, $n \in \mathbb{N}$, v.a. indipendenti aventi distribuzione esponenziale di parametri, rispettivamente, n ed n^2.

Studiare la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{Y_n}{X_n}.$$

70 7.7.93 SSA-SSE(m-z)

1. Un test radiologico per la tubercolosi ha esito incerto: la probabilità che il test su un malato sia positivo è $1-\beta$; la probabilità che il test sia positivo su un non malato è invece α. La frequenza relativa di malati nella popolazione è γ.

Un individuo, selezionato a caso nella popolazione e sottoposto a test, risulta positivo. Qual è la probabilità che egli sia sano?

2. La v.a. doppia (X, Y) ha funzione di densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $E(X \mid Y{=}y)$.

3. Sia $X \sim$Beta(a, b) e quindi con densità

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0<x<1,\ a>0,\ b>0.$$

Consideriamo il caso in cui $b{=}1$.
(a) Determinare la distribuzione della v.a. $Y_n = X^n$, $n \in \mathbb{N}$.
(b) Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$, Y_n è ancora una v.a. di tipo Beta?
(c) Studiare la convergenza della successione $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

71 9.9.93 SSD-SSE(a-l)

1. Siano X, Y e Z tre v.a. indipendenti e somiglianti, con distribuzione geometrica di parametro p. Calcolare le probabilità seguenti:
(a) $P(X{=}Y{=}Z)$;
(b) $P(X + Y \le Z)$.

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda{=}1$. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a

$$Z = |X - Y|\,.$$

3. Sia X una v.a. assolutamente continua avente funzione di densità $f_X(x)$ uguale a zero fuori dell'intervallo $(0, 1)$. Studiare la convergenza della successione di v.a. Y_n, $n \ge 2$, così definita:

$$Y_n = \begin{cases} nX, & X \le 1/n \\ X, & 1/n < X < (n-1)/n \\ nX - n + 1, & X \ge (n-1)/n \end{cases}$$

72 13.9.93 SSA-SSE(m-z)

1. Siano date due urne, U_1 e U_2. L'urna U_1 contiene 5 palline numerate da 1 a 5. L'urna U_2 contiene 5 palline bianche e 5 nere. Si estrae una pallina dall'urna U_1 e sia X la variabile aleatoria che indica il numero impresso su di essa. Successivamente, dall'urna U_2 si estraggono con ripetizione X palline. Sia Y il numero di palline bianche così estratte.

Calcolare:
(a) $\mathbb{E}(Y \mid X=x)$ e $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y \mid X=x)$;
(b) $\mathbb{E}(Y)$ e $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$.

2. Si consideri una matrice quadrata di n righe ed n colonne i cui elementi $X_{i,j}$ sono v.a. indipendenti che assumono i valori $+1$ e -1 con probabilità

$$P(X_{i,j}=1) = P(X_{i,j}=-1) = 1/2, \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Sia Y_n la v.a. definita come il determinante della matrice $(X_{i,j})$.
(a) Calcolare la varianza di Y_n per $n=2$ e $n=3$.
(b) Generalizzare i risultati del punto (a) al caso di n qualsiasi.

3. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme in $(0,1)$.
(a) Determinare la distribuzione della v.a. $S_n = -\sum_{j=1}^{n} \log X_j, \; n \in \mathbb{N}$.
(b) Ricavare il limite in distribuzione della successione $\{Z_n = S_n/n; \; n \in \mathbb{N}\}$.

73 22.11.93 SSD (esonero)

1. Siano X_1 e X_2 v.a. indipendenti con distribuzione geometrica di stesso parametro p. Trovare la distribuzione di probabilità di:
(a) $Y = \min\{X_1, X_2\}$;
(b) $Z = \max\{X_1, X_2\}$;
(c) v.a. doppia (Y, Z).

2. Siano X e Y v.a. indipendenti aventi rispettivamente distribuzione uniforme in $(0,1)$ ed esponenziale di parametro 1. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = X^{1/Y}.$$

74 24.11.93 SSD (esonero)

1. Tizio gioca ad una slot machine; ad ogni tiro vince una moneta con probabilità p e perde una moneta con probabilità $q = 1-p$. Inizialmente egli ha due monete, cosicché dopo due tiri può avere o 0 o 2 o 4 monete. Tizio vince il gioco non appena ottiene 4 monete (ovviamente perde il gioco se rimane senza monete).

Calcolare la probabilità degli eventi:
A_n =(Tizio vince dopo n paia di tiri),
A =(Tizio vince il gioco),
B_n =(Tizio perde dopo n paia di tiri),
B =(Tizio perde il gioco).

2. Dimostrare che A e B sono indipendenti se e solo se $P(A \mid B) = P(A \mid B^c)$, dove $0 < P(B) < 1$.

75 12.1.94 SSD (esonero)

1. Sia $\{X_n\}$, $n \geq 1$, una successione di v.a. aventi distribuzione uniforme nell'intervallo $(0, n)$. Studiare la convergenza della successione

$$Z_n = (X_n)^{1/n}.$$

2. Sia $\{X_n\}$, $n \geq 1$, una successione di v.a. aventi le seguenti funzioni di densità:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = n(X_n - 1).$$

3. Sia $\{X_n\}$, $n \geq 1$, una successione di v.a. tali che

$$P(X_n{=}0) = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad P(X_n{=}n) = \frac{n-1}{n}.$$

Studiare la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{1}{n} X_n.$$

76 17.1.94 SSD-SSE(a-l)

1. In un foglio quadrettato di n righe e n colonne vengono colorati $n+k$ quadretti scelti a caso senza ripetizione, con $k < n-1$. Qual è la probabilità che risulti interamente colorata una riga o una colonna?

2. Date le v.a. indipendenti X, esponenziale di parametro 1, e Y, uniformemente distribuita in $(0, 2)$, trovare la distribuzione della v.a.

$$Z = \frac{X}{\log Y}.$$

3. La v.a. doppia (X_n, Y_n) ha funzione di densità

$$f_n(x, y) = \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2}, & \text{per } 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare la f.r. della v.a.

$$Z_n = \frac{X_n + Y_n}{2}$$

e studiare se essa ha limite in distribuzione.

77 18.1.94 SSA-SSE(m-z)

1. Roulette russa.
Una pistola a tamburo da sei colpi viene caricata con un solo proiettile. Il tamburo viene poi fatto girare rapidamente in modo che si fermi in una posizione casuale (il proiettile non è visibile). Il sig. Tizio e altre cinque persone si siedono intorno a un tavolo su sei sedie numerate da 1 a 6. Il "gioco" ha due modalità: a) e b).

a) La persona sulla sedia n.1 prende la pistola, la punta alla propria tempia e preme il grilletto. Se muore, il gioco finisce; altrimenti egli passa la pistola alla persona sulla sedia successiva, la n.2. Questi ripete quanto fatto dal primo. E così via per tutti e sei i giocatori.
b) Tutto come in a), solo che dopo ogni colpo il tamburo viene fatto girare.
Per ciascuna delle due modalità a) e b), determinare:
(*i*) quale sedia al sg. Tizio conviene scegliere e
(*ii*) la probabilità che nessuno muoia.

2. Trovare la distribuzone di probabilità della v.a.

$$Z = X + Y,$$

dove X e Y sono v.a. indipendenti con distribuzione la prima uniforme sull'intervallo $(0, 1)$, e la seconda uniforme sui due punti 0 e 1.

3. Studiare la convergenza della succ. di v.a. Y_n definita per ogni n naturale da

$$Y_n = (X_1 \cdot X_2 \cdots X_n)^{1/n},$$

dove $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sono v.a. indipendenti e somiglianti uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$.
[*Suggerimento*: può essere conveniente studiare prima la convergenza di $-\log Y_n$]

78 4.2.94 SSD-SSE(a-l)

1. Vengono lanciate n monete identiche con $P(T) = p$, quindi si lanciano le N_1 monete che hanno dato Testa. Sia N_2 il numero di monete che hanno dato Testa al secondo lancio (nel caso N_1=0, si ponga N_2=0). Trovare la distribuzione di probabilità di N_2.

2. Sia X una v.a. uniforme in $(0, 1)$ ed Y una v.a. esponenziale di parametro 1, indipendente da X. Sia inoltre

$$Z = \begin{cases} X, & \text{se } Y < 1 \\ -X, & \text{se } Y \geq 1 \end{cases}$$

Trovare la distribuzione di probabilità di Z.

3. Sia $\{X_k\},\ k \geq 1$ una successione di v.a. indipendenti con distribuzione di Cauchy. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

79 15.2.94 SSA-SSE(m-z)

1. Un mazzo di carte contiene cento carte così numerate: $00, 01, 02, \ldots, 98, 99$. Estratta a caso una carta dal mazzo, diciamo S la somma delle due cifre presenti sulla carta estratta e T il loro prodotto.
(a) Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. T condizionata all'evento (S=4).
(b) Le v.a. S e T sono indipendenti?

2. Sia X una v.a. con distribuzione di Cauchy. Calcolare

$$P(X - X^2 > 0).$$

3. Studiare la convergenza della succ. di v.a. Y_n definita per ogni n naturale da

$$Y_n = (X_1 \cdot X_2 \cdots X_n)^{1/n},$$

dove $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sono v.a. indipendenti e somiglianti con densità

$$f(x) = 2x, \quad 0<x<1.$$

[*Suggerimento*: può essere conveniente studiare prima la convergenza di $\log Y_n$.]

80 6.6.94 SSA-SSE(m-z)

1. Date due urne U_1 e U_2 contenenti la prima n palline numerate da 1 a n, e la seconda $n{+}1$ palline numerate da 1 a $n{+}1$, si estrae a caso una pallina da ciascuna urna. Calcolare la probabilità che:
(a) la pallina estratta da U_1 presenti un numero maggiore di quello estratto da U_2;
(b) la pallina estratta da U_1 presenti un numero minore di quello estratto da U_2;
(c) la pallina estratta da U_1 presenti un numero uguale a quello estratto da U_2.

2. Sia (X, Y) una v.a. avente funzione di densità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, & 0 \le x \le 1 \text{ e } y > 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare:
(a) le distribuzioni di probabilità marginali delle componenti X e Y e se queste sono indipendenti;
(b) la distribuzione di probabilità della v.a. $Z = X - Y$.

3. Sia, per ogni n, Y_n una v.a. esponenziale di parametro $n{+}1$, e sia N una v.a. di Poisson di parametro μ ed indipendente dalle Y_n. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. Y_N e studiarne la convergenza per $\mu \longrightarrow 0$.

81 13.6.94 SSA-SSE(m-z)

1. Tre camion si rompono su un tratto di strada di lunghezza L nei punti aleatori X_1, X_2, X_3, con $0<X_1<X_2<X_3<L$ e la v.a. (X_1, X_2, X_3) ha densità

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{6}{L^3}, \quad 0<x_1<x_2<x_3<L.$$

Calcolare la probabilità che le due distanze $X_2 - X_1$ e $X_3 - X_2$ siano entrambe maggiori di d.

2. Supponiamo che X e Y siano due v.a. indipendenti, identicamente distribuite e con distribuzione binomiale di parametri n e p. Trovare:
(a) $P(X + Y = m)$;

(b) $P(X{=}k \mid X+Y{=}m)$.

3. Siano $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$, variabili aleatorie indipendenti e normali standardizzate. Studiare la convergenza (in almeno una delle forme conosciute) della successione

$$T_n = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}}}.$$

82 6.7.94 SSA-SSE(m-z)

1. Vi sono tre monete in una scatola. Una ha testa su entrambi i lati, una è regolare, la terza ha 3/4 di probabilità di dare testa in un lancio. Se si estrae a caso una moneta e lanciandola si ottiene testa, con quale probabilità essa è quella che ha testa su entrambi i lati?

2. Indicando con X un punto scelto con legge uniforme su un segmento di lunghezza L, calcolare

$$P\left(\frac{\min\{X, L-X\}}{\max\{X, L-X\}} < \frac{1}{4}\right).$$

3. Si consideri una successione $\{X_n;\ n \geq 1\}$ di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite. La funzione caratteristica di X_n sia, per ogni n,

$$H(u) = \{1 - c|u|^\alpha + o(u^\alpha)\},$$

con $c{>}0$ e $0{<}\alpha{\leq}2$.

Trovare la funzione caratteristica della v.a.

$$U_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n^{1/\alpha}}$$

ed il suo limite per $n \longrightarrow +\infty$. Quali distribuzioni limite conosciute si hanno al variare di α?

83 8.7.94 SSD-SSE(a-l)

1. L'urna U_1 contiene 1 pallina bianca e $n{-}1$ palline nere; l'urna U_2 $n{-}2$ palline bianche e 1 nera. Si estrae a caso una pallina dall'urna U_1 e la si mette nell'urna U_2; poi si estrae a caso una pallina dall'urna U_2 e la si mette nell'urna U_1.

Trovare la distribuzione di probabilità del numero finale di palline bianche nell'urna U_1.

2. Sia (X, Y) una v.a. doppia avente funzione di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & (x,y) \in \{(0,1/2) \times (1/2,1)\} \cup \{(1/2,1) \times (0,1/2)\} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

e siano

$$Z = \frac{-\log X}{\log 2} \quad \text{e} \quad W = \frac{-\log Y}{\log 2}.$$

Determinare la distribuzione di Z e quella di W e calcolare $F_{Z,W}(2,4)$.

3. Siano X e Y due v.a. indipendenti aventi rispettivamente distribuzione di Poisson ed esponenziale e tali che $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \mu$.

Determinare la distribuzione di $Z = X/Y$ e studiarne la convergenza in distribuzione per $\mu \longrightarrow 0$ e $\mu \longrightarrow +\infty$.

84 12.9.94 SSD-SSE(a-l)

1. Un giocatore punta ripetutamente un gettone sul dispari alla roulette. In partenza egli ha un gettone e smette di giocare quando o perde tutto o arriva a tre gettoni.

Trovare la probabilità di vittoria (arrivare a tre gettoni) e quella di rovina (arrivare a zero gettoni). Si ricorda che la probabilità del dispari alla roulette è p=18/37.

2. Sia (X, Y) una v.a. discreta avente la distribuzione di probabilità seguente:

$$P(X{=}r, Y{=}s) = p^2 q^s, \quad r{=}0, 1, 2, \ldots, s, \quad s{=}0, 1, 2, 3, \ldots$$

Trovare le distribuzioni marginali e calcolare $P(Y - X \leq 1)$.

3. Siano X e Y due v.a. indipendenti aventi rispettivamente distribuzione uniforme in $(0, 1)$ ed esponenziale di parametro 1. Determinare la distribuzione della v.a.

$$Z_k = \frac{kX}{kX + Y}, \; k > 0,$$

e studiarne la convergenza per $k \longrightarrow 0$ e per $k \longrightarrow +\infty$.

85 14.9.94 SSA-SSE(m-z)

1. In una scuola media vi sono n studenti di cui n_1 frequentano il primo anno, n_2 il secondo ed n_3 il terzo, con $n_1{+}n_2{+}n_3{=}n$. Supponiamo di scegliere a caso due studenti e di verificare che uno frequenta una classe più avanzata dell'altro.

Calcolare la probabilità che lo studente che frequenta la classe più avanzata sia del terzo anno.

2. Sia OA un segmento di lunghezza d. Si tracci a partire da O una semiretta che formi con OA un angolo di ampiezza aleatoria Θ, distribuita uniformemente in $[0, \pi/2]$. Sia B l'intersezione fra la semiretta e la perpendicolare ad OA passante per A.

Determinare:
(a) la distribuzione della v.a. Y pari all'area del triangolo OAB;
(b) il valor medio della v.a. H ="lunghezza del cateto AB".

3. Sia $\{Y_n;\; n \geq 1\}$ una successione di v.a. tali che, per ogni n, Y_n assume i valori k/n, k=$1, 2, \ldots, n$, ciascuno con probabilità $1/n$. Studiare la convergenza in distribuzione della successione data.

86 23.11.94 SSD (esonero)

1. Un arciere colpisce il bersaglio, ad ogni tiro, con probabilità 0,4 se c'è vento, e 0,7 se non c'è vento. La probabilità che ci sia vento è per ogni tiro, indipendentemente, 0,3. Calcolare:

(a) la probabilità di colpire in un tiro;
(b) di colpire almeno una volta in due tiri;
(c) la probabilità, una volta che il tiro è andato a segno, che ci sia stato vento.

2. In una compagnia di assicurazioni, ogni anno, indipendentemente dagli altri anni, la probabilità di sinistri è p' per un assicurato uomo e p'' per un assicurato donna. Gli assicurati maschi e femmine sono in numero uguale.

Trovare la probabilità che:
(a) un assicurato scelto a caso abbia sinistri in un dato anno;
(b) un assicurato scelto a caso abbia sinistri in due anni successivi;
(c) un assicurato, scelto a caso tra quelli che hanno sinistri in un dato anno, abbia sinistri anche nell'anno successivo.

87 22.12.94 SSD (esonero)

1. Le v.a. X e Y sono indipendenti e somiglianti, con distribuzione geometrica:

$$P(X{=}r) = P(Y{=}r) = pq^{r-1}, \text{ per } r{=}1, 2, 3, \dots$$

Trovare la distribuzione della v.a.

$$Z = \frac{\max\{X, Y\}}{X}.$$

2. Trovare la distribuzione della v.a.

$$Y = \begin{cases} \log 2 + \log X, & \text{per } 0 < X < \frac{1}{2} \\ -\log 2 - \log(1 - X), & \text{per } \frac{1}{2} < X < 1 \end{cases}$$

se la v.a. X è distribuita uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$.

88 14.1.95 SSD (esonero)

1. Le v.a. X_n e Y sono indipendenti: Y ha distribuzione di Poisson con parametro λ e per X_n si ha

$$P(X_n{=}0) = \frac{n-1}{n}, \quad P(X_n{=}1) = \frac{1}{n}\cdot$$

Trovare la distribuzione della v.a.

$$Z_n = X_n + Y$$

e studiarne la convergenza.

2. X e Y_α, con $\alpha > 1$, sono indipendenti, la prima uniformemente distribuita nell'intervallo $(0,1)$, la seconda avente f.r.

$$F_{Y_\alpha}(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1-(y+1)^{-\alpha}, & y > 0 \end{cases}$$

Studiare, per $\alpha \longrightarrow 1$ e $\alpha \longrightarrow +\infty$, la convergenza della v.a.

$$Z_\alpha = X + Y_\alpha.$$

89 18.1.95 SSD-SSE(a-l)

1. Si lanciano N monete identiche, con N v.a. di Poisson di parametro λ. Per ciascuna moneta si ha Testa con probabilità p e Croce con probabilità $1-p$, indipendentemente dalle altre monete e da N.

Siano X il numero di Teste uscite e Y il numero di Croci uscite. Determinare la distribuzione di X e quella di Y.

2. Un punto si muove su una retta con velocità 1, nel verso positivo, partendo dall'origine nell'istante $t{=}0$. Dopo un tempo aleatorio X, esponenziale di parametro λ, il punto inverte il moto, proseguendo nel verso negativo. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$X_t = \text{“posizione del punto all'istante } t\text{”}.$$

3. Siano $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$, $n \ge 1$, due successioni di v.a. tutte indipendenti ed esponenziali di parametro 1. Studiare la convergenza in distribuzione della successione

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k).$$

90 19.1.95 SSA-SSE(m-z)

1. In un opuscolo di 6 pagine, 5 pagine contengono errori di stampa. Viene fatta una stampa riveduta, in cui le pagine che contengono errori sono 3. Si sceglie a caso un opuscolo da uno scaffale che contiene 20 opscoli della prima edizione e 10 della ristampa: si esaminano 3 pagine scelte a caso senza ripetizione, e si trova che 2 di esse contengono errori e l'altra no.

Tenendo conto dell'esame effettuato, calcolare la probabilità che l'opuscolo scelto sia della prima edizione.

2. La v.a. doppia (X,Y) è uniformemente distribuita sull'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1,\ -x^2<y<x^2\}$.
(a) Determinare le due funzioni di densità marginali.
(b) X ed Y sono indipendenti? Sono correlate?

3. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(-1,1)$. Trovare la funzione caratteristica della v.a.

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_{2k} - X_{2k-1}).$$

e il limite in distribuzione della successione $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$

91 8.2.95 SSD-SSE(a-l)

1. Un'urna contiene a palline bianche e b palline nere. Si estrae una pallina e la si rimette nell'urna insieme ad altre c palline dello stesso colore della pallina estratta. Ad ogni estrazione si segue la stessa procedura. Sia B_n l'evento (la pallina estratta all'n-esimo passo è bianca).

Calcolare:
(a) $P(B_2)$;
(b) $P(B_1 \mid B_2)$;
(c) $P(B_n)$.

2. La capacità di una cisterna è di k mc ed inizialmente essa è vuota. Arrivano due piogge che portano rispettivamente X e Y mc di acqua, X e Y v.a. indipendenti ed esponenziali di parametri rispettivamente λ e μ.

Trovare la distribuzione di probabilità della quantità di acqua contenuta nella cisterna dopo le piogge.

3. Le v.a. X_μ e Y sono indipendenti; la prima ha distribuzione di Poisson di parametro μ, la seconda esponenziale di parametro λ. Studiare, per $\mu \longrightarrow 0$, la convergenza di

$$Z_\mu = \frac{Y}{X_\mu + 1}.$$

92 14.2.95 SSA-SSE(m-z)

1. Consideriamo un'urna contenente 3 palline nere, 2 bianche e 5 rosse. Due giocatori, Paolo e Mario, estraggono a turno una pallina (senza reimbussolamento). Il processo di estrazione inizia da Paolo. Il gioco termina appena si verifica uno dei seguenti eventi:

A_1=(Paolo estrae per primo pallina bianca),
A_2=(Mario estrae per primo pallina bianca),
A_3=(uno dei due giocatori estrae pallina rossa).

Se si verifica A_1, Paolo è dichiarato vincitore; se si verifica A_2, Mario è dichiarato vincitore; se si verifica A_3, il gioco si chiude in pareggio. Calcolare $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$.

2. Siano date le v.a. (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) con funzioni di densità:

$$f_{(X_1,Y_1)}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1,\ x < y < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_{(X_2,Y_2)}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1,\ 0 < y < x \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare, per i=1, 2, la distribuzione di probabilità di $W_i = 2X_i - Y_i$.

3. Si consideri la successione di v.a. $\{X_k;\ k \geq 1\}$ indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione:

$$P(X_k{=}r) = pq^{r-1},\ r{=}1, 2, \ldots$$

Sia

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{n},\ n{=}1, 2, \ldots$$

(a) Trovare le funzioni caratteristiche di $U_n,\ n \geq 1$.
(b) Trovare il limite in distribuzione di $\{U_n;\ n \geq 1\}$ utilizzando il punto (a). Confrontare il risultato ottenuto con quello che si ottiene applicando l'opportuno teorema limite.

93 7.6.95 SSD-SSE(a-l)

1. Sia $R{=}X/Y$, dove X e Y sono due v.a. indipendenti, aventi distribuzione geometrica:

$$\begin{aligned} P(X{=}r) &= (1-\alpha)\alpha^{r-1}, \quad r{=}1, 2, \ldots \text{ e } 0{<}\alpha{<}1 \\ P(Y{=}s) &= (1-\beta)\beta^{s-1}, \quad s{=}1, 2, \ldots \text{ e } 0{<}\beta{<}1 \end{aligned}$$

Calcolare $P(R{=}1)$ e $P(R{=}2)$.

2. Sia X una v.a. esponenziale di parametro λ. Calcolare la distribuzione della v.a.

$$Y = \mathrm{e}^{\alpha X}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

e trovare per quali valori di α si ha $\mathrm{E}Y < \infty$.

3. Sia $\{Z_n,\ n \geq 1\}$, una successione di v.a. indipendenti aventi, rispettivamente, distribuzione di Poisson di parametro $\mu_n{=}q^n,\ 0{<}q{<}1$.

Studiare la convergenza in distribuzione della successione

$$T_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n.$$

94 13.6.95 SSA-SSE(m-z)

1. Si lanciano due dadi. Per ogni i=1, 2, . . . , 6, e per ogni j=1, 2, . . . , 6, calcolare la probabilità che il minimo dei due risultati sia i dato che il massimo è j.

2. Sia X una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro 1 e sia $Y = [X + 1]$, dove $[\cdot]$ è la funzione parte intera.
(a) Trovare la distribuzione di probabilità di Y e riconoscerne il tipo.

(b) Ricavare la distribuzione di probabilità di $X-4$ condizionata all'evento $(Y \geq 5)$ e discutere il risultato trovato.

3. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,1)$, e siano, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \max\{X_1, X_3, \ldots, X_{2n-1}\},$$
$$V_n = \max\{X_2, X_4, \ldots, X_{2n}\}.$$

Studiare la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{V_n}{U_n}.$$

95 28.6.95 SSD-SSE(a-l)

1. Siano X e Y due v.a. indipendenti tali che:

$$P(X{=}1) = a \text{ e } P(X{=}-1) = 1-a;\ P(Y{=}1) = b \text{ e } P(Y{=}-1) = 1-b;\ a, b \in (0,1).$$

Sia inoltre

$$Z = \cos[\tfrac{\pi}{2}(X+Y)].$$

Calcolare la distribuzione di probabilità di Z e determinare per quali valori di a e di b le variabili (X, Z) e (Y, Z) sono a componenti indipendenti.

2. In un segmento di lunghezza 1 si sceglie un punto di ascissa aleatoria X, avente densità $f_X(x) = 2x,\ x \in (0,1)$. Fra i due segmenti così ottenuti si sceglie uno a caso, lanciando una moneta regolare. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = \text{“lunghezza del segmento scelto”}.$$

3. Siano $X_k, Y_k,\ k > 0$, v.a. indipendenti aventi, rispettivamente, distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,k)$ ed esponenziale di parametro k.

Calcolare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z_k = \frac{X_k}{Y_k}$$

e studiarne la convergenza in distribuzione per $k \longrightarrow 0$ e $k \longrightarrow +\infty$ (dare una giustificazione dei risultati ottenuti).

96 11.7.95 SSA-SSE(m-z)

1. Vi sono 3 famiglie di 3 componenti ciascuna che si siedono intorno ad un tavolo circolare di 9 posti. Si scelgono i posti casualmente e si considerano gli eventi

$$E_n = (\text{i 3 componenti della famiglia } n\text{-esima sono seduti vicini}), \quad n{=}1,2,3.$$

Calcolare:
(a) P(i 3 componenti di ciascuna delle 3 famiglie sono seduti vicini) $= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$,

(b) P(i 3 componenti di almeno 2 delle 3 famiglie sono seduti vicini) $= P[(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)]$,
(c) P(i 3 componenti di almeno 1 delle 3 famiglie sono seduti vicini) $= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$.

2. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, v.a. indipendenti ed uniformi in $[0,1]$. Siano N ed Y v.a. indipendenti tra loro (ed indipendenti anche dalle X_n) con distribuzione rispettivamente:

$$P(Y{=}y) = (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-(y+1)}, \quad y{=}0,1,2,\ldots$$

e

$$P(N{=}n) = \frac{1}{(\mathrm{e}-1)n!}, \quad n{=}1,2,\ldots$$

Determinare la distribuzione di:
(a) $U = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$,
(b) $V = Y + U$.

3. Siano $X_n,\ n \geq 1$, v.a. indipendenti ed uniformi in $[0,1]$. Trovare il limite in distribuzione di

$$Z_n = \frac{\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}}{n[1-\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}]}.$$

97 7.9.95 SSE(a-l)

1. Durante un intero anno, il numero di raffreddori che un individuo contrae può considerarsi una v.a. X con distribuzione di Poisson di parametro 5. Viene immessa sul mercato una nuova medicina: essa risulta efficace sul 75% della popolazione e per tali persone il numero di raffreddori contratti in un anno , condizionatamente all'uso della medicina, è una v.a. di Poisson di parametro 3. Sul restante 25% della popolazione la medicina è inefficace. Se un individuo a caso prende la medicina e in un anno ha due raffreddori, qual è la probabilità che appartenga alla categoria di persone su cui la medicina ha effetto?

2. Sia (X,Y) una v.a. doppia con funzione di densità

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/\pi, & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare la funzione di ripartizione e la funzione di densità della v.a.

$$Z = \log\left[\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right].$$

3. Sia $\{U_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,1]$. Per ogni n definiamo

$$Y_n = \max\{U_1, \ldots, U_n\}.$$

(a) Determinare una costante c tale che $Y_n \xrightarrow{\mathrm{p}} c$.
(b) Determinare la distribuzione asintotica di $Z_n = n(1-Y_n)$ per $n \to \infty$.

98 8.9.95 SSD-SSE(a-l)

1. Un'emittente invia un segnale che è o 0 o 1. Il segnale, prima di essere ricevuto, passa attraverso due cananli successivi che, indipendentemente uno dall'altro, lo trasmettono, corretto con probabilità p, e scambiato con l'altra cifra con probabilità $1-p$.
(a) Determinare la probabilità che il segnale venga ricevuto correttamente dal decodificatore e calcolare per quale valore di p tale probabilità è minima.
(b) Determinare la probabilità che il segnale venga ricevuto correttamente dal decodificatore nel caso in cui il passaggio avvenga attraverso tre canali successivi in condizioni analoghe al caso precedente.

2. Sia X una v.a. uniforme nell'intervallo $(0,1)$. Calcolare la distribuzione della v.a. così definita:

$$Y = \begin{cases} \sqrt{2X}, & \text{per } 0 < X < 1/2 \\ 2 - \sqrt{2-2X}, & \text{per } 1/2 \le X < 1 \end{cases}$$

3. Sia $\{X_n,\ n \ge 1\}$, una successione di v.a. indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(0,1)$; siano U_n e V_n due successioni di v.a. così definite:

$$U_n = (X_{2n-1})^{1/n}, \quad V_n = (X_{2n})^{1/n}, \quad \text{per ogni } n \ge 1.$$

Calcolare la distribuzione di probabilità della v.a. $Z_n = U_n/V_n$ e studiarne la convergenza per $n \longrightarrow +\infty$.

99 19.9.95 SSA-SSE(m-z)

1. Sia Y una v.a. con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,5)$. Calcolare la probabilità che le radici dell'equazione in x

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

siano:
(a) entrambe reali;
(b) entrambe reali e positive.

2. Consideriamo un'urna contenente n palline numerate. Si estraggono dall'urna k palline senza ripetizione e sia

$$X_i = \begin{cases} i, & \text{se la } i\text{-esima pallina viene estratta} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,n.$$

(a) Trovare la distribuzione di probabilità di (X_i, X_j).
(b) Calcolare la $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ ed interpretarne il segno.

3. Sia $\{X_n,\ n \ge 1\}$, una successione di v.a. indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(0,1)$. Siano

$$Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \quad \text{e} \quad Z_n = n(1 - Y_n).$$

Trovare il limite in distribuzione di Z_n.

100 10.11.95 SSD (esonero)

1. Si lancia un dado: se il risultato è un numero pari si lancia una moneta finché esce T; se il risultato è un numero dispari si lanciano due monete finché escono entrambe T. Calcolare, per $r \in \mathbb{N}$, la probabilità dell'evento $A_r =$ (ci si ferma all'r-esimo lancio).

2. Una moneta regolare viene lanciata sei volte. Trovare la probabilità che T appaia almeno due volte di seguito.

101 19.12.95 SSD (esonero)

1. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = |X - Y|\,,$$

dove X e Y sono v.a. indipendenti tali che $P(X{=}r) = P(Y{=}r) = pq^{r-1}$, $r{=}1, 2, \ldots$

2. Un punto si muove su una retta con velocità 1, nel verso positivo, partendo dall'origine. Dopo un tempo aleatorio X, esponenziale di parametro λ, prosegue il suo moto, sempre nella stessa direzione, ma con velocità 2. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$X_t = \text{“posizione del punto all'istante } t\text{”}.$$

102 17.1.96 SSA-SSE(m-z)

1. Si lancia ripetutamente un dado. Calcolare la probabilità che il due esca per la prima volta al k-esimo lancio dato che risultato pari si ha per la prima volta all'h-esimo lancio. Verificare che tali probabilità, al variare di k, sommano a uno.

2. Sia (X, Y) una v.a. doppia uniformemente distribuita sul triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1/2, 0)$, $(0, 2)$. Trovare la distribuzione di probabilità di $Z = Y + 4X$ e quella di $Q = Y - X/4$.

3. Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sono indipendenti e normali standardizzate. Sia, per ogni n naturale,

$$Y_n = \frac{X_1 X_2 + X_3 X_4 + \cdots + X_{2n-1} X_{2n}}{n}.$$

(a) Calcolare media e varianza di Y_n.
(b) Studiare la convergenza della successione Y_n.

103 17.1.96 SSD (esonero)

1. X e Y sono v.a. indipendenti aventi distribuzione geometrica con parametri diversi:

$$P(X{=}r) = pq^{r-1}, \quad r{=}1, 2, \ldots$$
$$P(Y{=}s) = p_1 q_1^{s-1}, \quad s{=}1, 2, \ldots$$

Trovare la distribuzione di $Z_{p_1} = X + Y$ e studiare la convergenza in distribuzione di Z_{p_1} quando $p_1 \longrightarrow p$.

2. Siano X_λ e Y_μ due v.a. indipendenti ed esponenziali con parametri rispettivamente λ e μ. Studiare la convergenza di

$$Z = \frac{X_\lambda - Y_\mu}{X_\lambda + Y_\mu}$$

per $\mu/\lambda \longrightarrow 0$, $\mu/\lambda \longrightarrow 1$, $\mu/\lambda \longrightarrow +\infty$.

104 24.1.96 SSD-SSE(a-l)

1. L'urna U_1 contiene 2 palline bianche e 2 nere; l'urna U_2 contiene 1 pallina bianca e 2 nere. Si estrae a caso una pallina dall'urna U_1 e la si mette nell'urna U_2; da quest'ultima si estraggono a caso con ripetizione due palline e le si rimettono nell'urna U_1.

Determinare la distribuzione della v.a. $X =$"numero di palline bianche nell'urna U_1 dopo le due operazioni".

2. Sia X una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro λ. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. $Y = [X] + 1$.
Nota: il simbolo $[X]$ indica la parte intera di X. Ad esempio, se $X{=}2.53$, allora $[X]{=}2$ e $Y{=}3$.

3. Siano, per $n \in \mathbb{N}$ fissato, $U_{1n}, U_{2n}, \ldots, U_{nn}$, n v.a. indipendenti e somiglianti tali che

$$P(U_{jn}{=}0) = \frac{n-1}{n}, \quad P(U_{jn}{=}1) = \frac{1}{n}, \quad j{=}1, \ldots, n.$$

Per ogni n definiamo

$$Y_n = U_{1n} + U_{2n} + \cdots + U_{nn} - \frac{U_{1n} + U_{2n} + \cdots + U_{nn}}{n};$$

determinare il limite in distribuzione della successione Y_n.

105 31.1.96. SSA-SSE(m-z)

1. Ci sono due strade che portano da A a B ed altre due fra B e C e per andare da A a C bisogna passare per B. Ciascuna delle quattro strade, indipendentemente una dall'altra, è libera dalla neve con probabilità p=1/2. Trovare la probabilità che si possa andare da A a B sapendo che non si può andare da A a C.

2. Siano date le v.a.

$$U = \min\{X, Y\}, \quad V = \max\{X, Y\}, \quad W = V - U,$$

con X e Y indipendenti ed esponenziali di parametro λ e μ rispettivamente.
(a) Calcolare $P(U{=}X)$.
(b) Mostrare che U e W sono indipendenti.

3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.a. indipendenti con distribuzione di Cauchy standard. Mostrare che la successione

$$Y_n = \frac{\pi}{n} \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

converge in distribuzione alla seguente f.r. F:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \exp\{-1/y\}, & y > 0 \end{cases}$$

[*Suggerimento.* Si consideri che per $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$ e che, per $y \to 0$, $\arctan y = y + o(y)$].

106 7.2.96 SSD-SSE(a-l)

1. Sia N una v.a. con distribuzione discreta su $\mathbb{N}$, tale che

$$P(N{=}n) = 1/2^n, \quad n{=}1, 2, 3, \ldots$$

Sia inoltre S_N la v.a. "somma dei punteggi ottenuti lanciando N volte un dado regolare". Si calcoli:
- $P(N{=}2 \mid S_N{=}4)$;
- $P(S_N{=}4 \mid N \text{ pari})$;
- $P(N{=}2 \mid (S_N{=}4) \cap (\text{il primo lancio del dado dà } 1))$.

2. Una persona attende l'autobus per un tempo (in minuti) aleatorio X con distribuzione esponenziale di parametro $1/10$. Il tempo (sempre in minuti) impiegato dall'autobus per arrivare a destinazione è una v.a. Y distribuita uniformemente nell'intervallo $(10, 20)$.

Determinare la distribuzione di probabilità del tempo totale impiegato per arrivare a destinazione, la sua media e la sua varianza.

3. Consideriamo le successioni di v.a. indipendenti $\{X_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ e $\{Y_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ (inoltre X_j è indipendente da Y_k, $\forall j,k$) e tali che, per ogni $n\in\mathbb{N}$ fissato, X_n e Y_n risultano somiglianti con densità proporzionale ad una densità esponenziale di parametro $n\lambda$, limitatamente all'intervallo $(0,n)$, ovvero

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} k\cdot n\lambda e^{-n\lambda x}, & 0<x<n \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Sia inoltre, per ogni n,

$$Z_n = n(X_n - Y_n).$$

Determinare:
- la costante di proporzionalità k;
- il limite in distribuzione della successione di v.a. $\{Z_n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

107 3.6.96 SSD-SSE(a-l)

1. L'urna U_1 contiene 12 palline tutte rosse, l'urna U_2 contiene 12 palline di cui 4 rosse e le rimanenti nere. Si sceglie a caso un'urna e da questa si fanno estrazioni con ripetizione.
(a) Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa?
(b) Qual è la probabilità che le prime due estratte siano di colori diversi?
(c) Sapendo che le prime k estratte sono rosse, qual è la probabilità che l'urna dalla quale sono state estratte sia U_1?
(d) Determinare per quale valore di k la probabilità di cui al punto (c) risulta maggiore del 99%.

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti e somiglianti aventi distribuzione uniforme in $(0,1)$. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = \frac{\log X}{\log X + \log Y}.$$

3. Siano X e Y due v.a. indipendenti e somiglianti aventi distribuzione uniforme in $(0,1)$. Studiare la convergenza della successione $\{Z_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, dove $Z_n = (XY)^n$.

108 13.6.96 SSA-SSE(m-z)

1. Siano date quattro persone un pò litigiose A, B, C, D. Comunque si prendano due delle quattro persone, la probabilità che queste siano in lite è p, indipendentemente dalla situazione nelle altre possibili coppie. Se due persone non sono in lite, esse si sentono per telefono e si racccontano tutte le novità; se invece sono in lite non si sentono affatto. Qual è la probabilità che un'informazione proveniente da A raggiunga D, sapendo che B e C sono in lite?

2. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti tali che $P(X_n\!=+1) = P(X_n\!=-1) = 1/2$ e si consideri la successione

$$Y_n = \frac{\sum_{h=1}^n hX_h}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{h=1}^n hX_h)}}.$$

(a) Calcolare $\mathrm{Var}(\sum_{h=1}^n hX_h)$;

(b) provare che
$$\frac{(\sum_{h=1}^{n} \mathrm{E}\,|hX_h|^3)^{1/3}}{(\sum_{h=1}^{n} \mathrm{E}\,|hX_h|^2)^{1/2}}$$
converge a 0 quando $n \longrightarrow +\infty$;
(c) argomentare allora che Y_n converge alla distribuzione normale.
[*Suggerimento*: si ricordi che la somma delle potenze r-esime dei primi n naturali è un polinomio in n di grado $r+1$.]

3. Sia (X, Y) una v.a. doppia con densità
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$
Trovare la distribuzione di $X+Y$.

109 26.6.96 SSD-SSE(a-l)

1. In un parcheggio ci sono n posti in fila, numerati da 1 a n, inizialmente tutti liberi. Arriva un'auto e parcheggia in un posto X scelto a caso; arriva poi una seconda auto che sceglie ancora a caso il proprio posto Y tra gli $n-1$ ancora disponibili. Determinare la distribuzione della v.a.
$$D = |Y - X|\,,$$
la distanza tra le due automobili.
[*Nota*: si intende che, se le macchine sono parcheggiate vicine, la loro distanza è 1.]

2. Siano X_1, X_2, X_3 tre v.a. indipendenti e identicamente distribuite con densità esponenziale di parametro λ. Determinare la distribuzione di
$$Y = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}\,.$$

3. Sia X una v.a. reale con funzione di ripartizione F, tale che $F(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Studiare la convergenza della successione di v.a. $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ così definite:
$$Z_n = \begin{cases} X, & |X| \leq n \\ 0, & |X| > n \end{cases}$$

110 4.7.96 SSA-SSE(m-z)

1. Il 10% della popolazione soffre di una seria malattia. Ad un individuo estratto a caso vengono somministrati due test diagnostici indipendenti. Ciascuno dei due test dà una diagnosi corretta il 90% delle volte. Calcolare la probabilità che l'individuo sia effettivamente malato nell'ipotesi che:
(a) entrambi i test siano positivi;
(b) un solo test sia positivo.

2. Una moneta dà testa con probabilità p e viene lanciata N volte, dove N è una v.a. con distribuzione di Poisson di parametro μ. Siano X e Y rispettivamente il numero di teste e di croci ottenute.

(a) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta della v.a. doppia (X, Y).
(b) Dimostrare che X e Y sono indipendenti.

3. Date due v.a. indipendenti X_n e Y_n, entrambe con distribuzione di Poisson di parametro n, si considerino due nuove v.a. :

$$U_n = \frac{X_n - Y_n}{\sqrt{n}} \qquad \text{e} \qquad V_n = \frac{X_n + Y_n}{n}.$$

(a) Calcolare la funzione caratteristica di U_n e quella di V_n.
(b) Dimostrare che $U_n \xrightarrow{\mathrm{d}} U \sim \mathcal{N}(0,2)$ e $V_n \xrightarrow{\mathrm{p}} 2$.
(c) Dedurne, tramite il teorema di Slutzky†, la convergenza in distribuzione di

$$Z_n = \frac{X_n - Y_n}{\sqrt{X_n + Y_n}}.$$

[† *Teorema di Slutzky*: se $S_n \xrightarrow{\mathrm{d}} S$ e $T_n \xrightarrow{\mathrm{d}}$ cost., allora $S_n/T_n \xrightarrow{\mathrm{d}} S/$cost.]

111 11.9.96 SSD-SSE(a-l)

1. In un'urna ci sono r $(r \geq 3)$ palline **R**osse ed n $(n \geq 1)$ **N**ere. Si estraggono a caso, senza ripetizione, una per volta, tutte le $n+r$ palline. Trovare la probabilità che:
(a) l'ultima pallina estratta sia **R**;
(b) la prima e l'ultima pallina estratta siano **R**;
(c) l'ultima pallina estratta sia **R**, sapendo che la prima e la seconda sono **R**.

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $(0, 1)$. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. :

$$Z = \frac{\log X}{\log Y}.$$

3. Sia $\{Y_n,\ n \geq 1\}$, una successione di v.a. indipendenti aventi la seguente funzione di ripartizione:

$$F_n(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ 1 - 1/y^n, & y > 1 \end{cases}$$

ed X una v.a., indipendente dalle Y_n, avente la seguente funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1 - 1/x, & x > 1 \end{cases}$$

Studiare la convergenza in distribuzione della successione:

$$Z_n = \frac{X}{X + Y_n}.$$

112 13.9.96 SSA-SSE(m-z)

1. In un gioco gli n giocatori $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ lanciano a turno una moneta regolare (comincia A_1, poi A_2 e così via). Il primo che ottiene testa vince; se invece tutti ottengono croce si ricomincia da capo nello stesso ordine.

(a) Calcolare la probabilità di vittoria del giocatore A_k, k=$1, \dots, n$.
(b) Verificare che la somma di tali probabilità è 1.

2. Sia (X, Y) una v.a. doppia con distribuzione uniforme nella regione del piano

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

con a e b costanti reali positive.
(a) Determinare la densità congiunta $f_{(X,Y)}$.
(b) Determinare le densità marginali f_X e f_Y e stabilire se le due componenti sono indipendenti.
(c) Calcolare $\mathrm{E}(X^2)$.

3. Sia data la successione di v.a. indipendenti

$$X_n = \begin{cases} +1 \text{ con probabilità } p_n \\ -1 \text{ con probabilità } 1 - p_n \end{cases} \qquad n=1, 2, \dots$$

con $p_n \in [0, 1]$.
(a) Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (X_n - \mathrm{E}X_n)/n$ converge quasi certamente.
(b) Determinare una successione di valori $p_n \in [0, 1]$ in modo tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n/n$ diverga e argomentare tale risposta.

113 26.11.96 SSD (esonero)

1. Ad un torneo partecipano quattro giocatori, A, B, C, D, la cui forza è valutata rispettivamente con i punteggi 4, 3, 2, 1. Per ciascun giocatore la probabilità di vittoria varia al variare dell'avversario; più precisamente quando due giocatori si incontrano la probabilità di vittoria di ciascuno di essi è proporzionale ai rispettivi punteggi.

Si incontrano il più forte con il più debole e i due intermedi fra loro; poi i due vincitori disputano la finale.

Qual è la probabilità che vinca il più forte?

2. Un'urna contiene b palline bianche ed n nere. Il giocatore A estrae una pallina e se è bianca ha vinto, altrimenti, dall'urna che ora contiene $b+n-1$ palline, estrae una pallina il giocatore B e se è bianca ha vinto. Determinare le probabilità seguenti: $p_1 = P($vince A alla prima estrazione$)$, $p_2 = P($vince B alla prima estrazione$)$, $p_3 = P($alla prima estrazione non vince nessuno$)$.

Se nessuno vince alla prima estrazione, si ricompone l'urna iniziale e si continua il gioco con le stesse regole, fino alla vittoria di uno dei giocatori. Determinare la probabilità di vittoria di A, la probabilità di vittoria di B e per quali valori di b e di n il gioco è equo.

114 13.1.97 SSA-SSE(m-z) (esercitazione)

1. Si tira contro un bersaglio finché questo non si rompe. Ad ogni tiro si fa centro, cioè si colpisce il bersaglio, con probabilità p_c, indipendentemente dall'esito degli altri tiri. Inoltre, ad ogni centro, la probabilità che il bersaglio si rompa è p_r, indipendentemente da quante volte il bersaglio è già stato centrato.

Calcolare la probabilità degli eventi C_k=(il bersaglio si rompe al k-esimo centro) e T_n=(il bersaglio si rompe all' n-esimo tiro), e calcolare $P(T_n \mid C_k)$.

2. Le v.a. $N, X_1, \dots, X_n, \dots$ sono indipendenti con $N \sim \text{Geom}(p)$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \text{Espon}(\lambda)$. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y = X_1 + \cdots + X_N.$$

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione $\mathcal{N}(0,1)$. Studiare la convergenza delle successioni

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) \qquad \text{e} \qquad Z_n = \frac{nX_{n+1}}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}.$$

115 22.1.97 SSDS (esonero)

1. Le v.a. X_λ e Y sono indipendenti e hanno distribuzione esponenziale, con parametri rispettivamente λ e 1. Studiare la convergenza, per $\lambda \longrightarrow 0$, per $\lambda \longrightarrow 1$, e per $\lambda \longrightarrow +\infty$, della v.a.

$$Z_\lambda = \frac{X_\lambda}{X_\lambda + Y}.$$

2. Studiare la convergenza, per $n \longrightarrow \infty$, della v.a.

$$Z_n = \frac{nX}{(n+1)X + nY},$$

dove X e Y sono indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $(0,1)$.

116 24.1.97 SSA-SSE(m-z)

1. Bisogna sottoporre a un test positivo/negativo il sangue estratto da n persone. Il test è esatto, ma molto costoso. Invece di eseguire il test su ciascuna delle n persone, si procede così: si scelgono k delle n persone ($1 \le k \le n$), si miscela il loro sangue e si sottopone ad un unico test il campione miscelato così ottenuto. Se questo test risulta negativo, si ottiene in un colpo solo il risultato per le k persone; altrimenti queste vengono sottoposte al test singolarmente. In ogni caso le rimanenti $n-k$ persone vengono esaminate una per una. Per ogni persona, indipendentemente dalle altre, la probabilità che il test sia positivo è p. Calcolare:
(a) la probabilità che il campione miscelato risulti negativo;
(b) la media della v.a. $X =$"numero totale di test eseguiti";
(c) il valore di k che minimizza la $\mathrm{E}X$ nell'ipotesi che $p = 1 - \mathrm{e}^{-2/n}$.

2. La v.a. doppia (X,Y) ha densità $f(x,y) = y\,\mathrm{e}^{-(x+1)y}$, x e $y > 0$. Trovare le densità condizionate e le densità marginali. Calcolare le loro medie. X ed Y sono incorrelate? Sono indipendenti?

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale simmetrica di parametro 1, cioè con densità

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}.$$

Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n}(|X_i| - 1)/\sqrt{n}.$$

117 28.1.97 SSDS-SSE(a-l)

1. Due urne U_1 e U_2 contengono palline bianche e nere in proporzione diversa: la probabilità di estrarre pallina bianca è rispettivamente p_1 e p_2.

Tizio riceve un premio se estrae almeno una pallina bianca su due, potendo scegliere una tra le due diverse regole di estrazione seguenti:
(a) scegliere a caso un'urna, estrarre una pallina, rimetterla dentro, scegliere di nuovo a caso un'urna ed estrarre di nuovo;
(b) scegliere a caso un'urna, estrarre una pallina, rimetterla dentro e, sempre dalla stessa urna, estrarre di nuovo.
Quale delle due procedure risulta più conveniente scegliere a Tizio?

2. Sia N una v.a. tale che $P(N{=}r) = pq^{r-1}$, $r{=}1,2,3,\ldots$ ed X_N una v.a. dipendente da N, esponenziale di parametro r quando $N{=}r$. Trovare la distribuzione di probabilità di $Y = X_N$.

3. Siano X_λ e Y due v.a. indipendenti aventi distribuzione, rispettivamente esponenziale di parametro λ e uniforme in $(0,1)$. Studiare la convergenza della v.a.

$$Z_\lambda = \frac{X_\lambda}{X_\lambda + Y}$$

quando $\lambda \longrightarrow 0$, $\lambda \longrightarrow 1$, $\lambda \longrightarrow +\infty$.

118 12.2.97 SSA-SSE(m-z)

1. A Piovarello piove spesso. In ogni giorno dell'anno, la probabilità di pioggia è 1/2. Ogni mattina il sig. Totò ascolta il bollettino meteo e solo in base ad esso decide se prendere o no l'ombrello. Se è prevista pioggia, prende l'ombrello. Se non è prevista pioggia, prende l'ombrello con probabilità 1/3, e non lo prende quindi con probabilità 2/3. La probabilità che il bollettino meteo preveda giusto è 2/3 (vale cioè 2/3 la probabilità che il bollettino [non] preveda pioggia dato che quel giorno [non] piove).

Con riferimento a un particolare giorno dell'anno, calcolare $Pr(\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{O}^c)$, $Pr(\boldsymbol{P}^c \cap \boldsymbol{O})$, $Pr(\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{O})$ e $Pr(\boldsymbol{P}^c \mid \boldsymbol{O}^c)$, dove si è posto:

$\boldsymbol{PP}$ =(il bollettino meteo prevede pioggia),

$\boldsymbol{O}$ =(il sig. Totò prende l'ombrello),

$\boldsymbol{P}$ =(piove).

2. Sia X una v.a. con distribuzione Gamma(λ, ν), con $\nu > 1$. Determinare la moda della funzione di densità di X e dimostrare che essa è uguale al reciproco del valor medio della v.a. $Y = 1/X$.

3. Siano N_p una v.a. con distribuzione geometrica di parametro $p \in (0,1)$ e $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di v.a., indipendenti fra loro e da N_p, distribuite con legge uniforme nell'intervallo $(0,1)$.

Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y_p = \max\{X_1, \ldots, X_{N_p}\}$$

e studiare il limite in distribuzione di Y_p per $p \longrightarrow 0$ e per $p \longrightarrow 1$.

119 14.2.1997 SSDS-SSE(a-l)

1. In un gioco televisivo bisogna rispondere a due domande. La probabilità di dare la risposta esatta è p_1 per la prima domanda e p_2 per la seconda, con indipendenza tra i partecipanti e tra le domande. I partecipanti sono un numero aleatorio N, con distribuzione di Poisson di parametro λ. Trovare la distribuzione della variabile aleatoria X pari al numero di partecipanti che rispondono esattamente a entrambe le domande.

2. La variabile aleatoria doppia (X, Y) è distribuita uniformemente nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$. Trovare la distribuzione della variabile aleatoria

$$Z = X - Y.$$

3. Studiare la convergenza della successione di variabili aleatorie

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}},$$

dove le variabili aleatorie X_r, $r=1,2,\ldots$ sono indipendenti con distribuzione uniforme nell'intervallo $(-1,1)$.

120 4.6.97 SSDS-SSE(a-l)

1. Siano $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n$ n urne contenenti palline bianche e nere. Più precisamente, l'urna U_i contiene $i-1$ palline bianche e $i+1$ palline nere, $i=1,2,\ldots,n$. Viene scelta l'urna U_i con probabilità $p_i = ki^2$ e da questa si estraggono due palline con ripetizione.
(a) Determinare la costante k.
(b) Calcolare la probabilità dell'evento (due palline di colore diverso).

2. Si consideri l'equazione in z:

$$Xz^2 + Yz + 1 = 0,$$

dove i coefficienti X e Y sono variabili aleatorie e la variabile aleatoria doppia (X, Y) è uniformemente distribuita nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Trovare la probabilità che l'equazione abbia radici reali.

3. Sia $\{X_n;\ n{=}1,2,\ldots\}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e somiglianti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.
(a) Data la v.a. $Y_r = X_r \cdot X_{r+1},\ r{=}1,2,\ldots$, calcolare $\mathrm{E}Y_r$ e $\mathrm{Var}(Y_r)$.
(b) Studiare la convergenza delle successioni di v.a. $\{V_n;\ n{=}1,2,\ldots\}$ e $\{Z_n;\ n{=}1,2,\ldots\}$, con

$$V_n = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n-1}) \qquad \text{e} \qquad Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n-1}).$$

121 11.6.97 SSA-SSE(m-z)

1. Si considerino tutti i numeri di sei cifre, inclusi quelli che iniziano con uno o più zeri, da 000000 a 999999. Da questi numeri, uno viene estratto a caso. Sia A_i =(la cifra i appare esattamente due volte nel numero estratto), $i{=}0,1,2,\ldots,9$. Trovare:
(a) $P(A_i)$;
(b) $P(A_i \cap A_j),\ i \neq j$;
(c) $P(A_i \cap A_j \cap A_k),\ i \neq j \neq k$;
(d) P(almeno una cifra appare esattamente due volte).

2. Siano X ed Y due v.a. indipendenti ed uniformemente distribuite nell'intervallo $(0,1)$. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = X^2 + Y^2 - 2XY.$$

3. Della v.a. doppia (K,Y), si conoscono la distribuzione marginale di K, che è geometrica di parametro p, e, per ogni $k \in \mathbb{N}$, la distribuzione di Y condizionata all'evento $(K{=}k)$, che è esponenziale di parametro k. Trovare la distribuzione marginale di Y e studiarne il limite per $p \longrightarrow 0^+$ e per $p \longrightarrow 1^-$.

122 2.7.97 SSA-SSE(m-z)

1. In una fabbrica di bibite le bottiglie, che essa stessa produce, vengono sottoposte a un controllo prima di essere riempite. Il 30% delle bottiglie prodotte sono difettose. La probabilità che l'ispettore si accorga che una bottiglia è difettosa, e quindi la scarti, è 0,9. Mentre la probabilità che l'ispettore giudichi erroneamente difettosa una bottiglia buona è 0,2.

Qual è la probabilità che una bottiglia scartata sia difettosa? E la probabilità che una bottiglia giudicata buona sia invece difettosa?

2. Siano date tre città (Mosca, S. Pietroburgo, Kiev). Un turista smemorato decide di visitarle tutte e tre.

Per il primo viaggio sceglie una delle tre città. Poi sceglie una delle due città rimaste come meta del suo secondo viaggio. Al terzo viaggio il turista ricorda solo la meta del secondo viaggio effettuato e sceglie a caso fra le due città escludendo l'ultima visitata (quindi in questo caso visita con probabilità 1/2 una nuova città e con probabilità 1/2 una città già vista). E cos via, finché il turista non ha visto tutte e tre le città.

Calcolare il numero medio di viaggi necessari per vedere tutte e tre le città.
[*Suggerimento*: si ponga X_i =“numero aleatorio di viaggi necessari per visitare una città nuova quando se ne siano già viste i diverse”, $i{=}0,1,2$.]

3. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di v.a. indipendenti tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, X_n sia distribuita con legge normale di media μ e varianza n^2. Posto, per ogni n,

$$Y_n = \frac{X_n - X_{n+1}}{n},$$

trovare la distribuzione di probabilità di Y_n e studiarne il limite per $n \longrightarrow +\infty$.

123 2.7.97 SSDS-SSE(a-l)

1. Un giocatore deve affrontare tre prove contro due avversari A e B, incontrando alternativamente i due avversari, potendo scegliere di cominciare con A o con B; in altre parole deve giocare successivamente con A, B, A oppure con B, A, B. Ottiene il premio se vince due incontri successivi.

Se le prove sono indipendenti e le probabilità p_A e p_B di battere, rispettivamente, l'avversario A e B sono diverse, gli conviene cominciare con l'avversario più forte o con il più debole?

2. Sia $\{U_k,\ k \geq 1\}$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(0, 1)$, e sia X una v.a. avente distribuzione:

$$P(X{=}n) = \frac{c}{n!}, \quad n{=}1, 2, \ldots$$

(a) Determinare la costante c;
(b) Determinare la distribuzione della v.a. $Z = \min\{U_1, U_2, \ldots, U_X\}$.

3. Studiare la convergenza della successione di v.a.

$$Z_n = \frac{X_n}{X_n + Y_n},$$

sapendo che la v.a. doppia (X_n, Y_n) è equidistribuita nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1/n)$, $(1, 0)$.

124 15.9.97 SSDS-SSE(a-l)

1. Si lancia un dado: sia X il risultato ottenuto. Si lanciano quindi X monete regolari e si ripete l'operazione finché tutte le monete danno testa. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. $Y =$"numero di lanci effettuati di X monete".

2. La v.a. X è uniformemente distribuita nell'intervallo $(-1, 1)$. La v.a. R, indipendente da X, assume valori 1 e 2 entrambi con probabilità 1/2. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. X^R.

3. Una scatola contiene quattro palline numerate 0,1,1,2. Vengono effettuate n estrazioni con ripetizione. Sia X_i la v.a. "numero della pallina all'estrazione i-esima " ($i{=}1, \ldots, n$).
(a) Calcolare la funzione caratteristica di X_i.
(b) Determinare la distribuzione di probabilità di

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

(c) Determinare a_n e b_n in modo tale che

$$\frac{Y_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\text{d}} \mathcal{N}(0,1).$$

125 16.9.97 SSA-SSE(m-z)

1. La famiglia Rossi ha due soli figli, Carlo e Mario. Nella scuola da loro frequentata c'è un'epidemia di varicella. Ciascuno dei due bambini ha, indipendentemente dall'altro, probabilità p di infettarsi a scuola. Sia I il numero aleatorio di bambini che contraggono la varicella nella famiglia Rossi. Determinare la distribuzione della variabile aleatoria I ed il suo valore medio nell'ipotesi che, se solo uno dei due bambini si è infettato a scuola, l'altro contrae la varicella con probabilità p.
Suggerimento: Si consiglia di usare la seguente notazione:
C_1 =(Carlo si infetta a scuola), M_1 =(Mario si infetta a scuola),
C_2 =(Carlo si infetta da Mario a casa), M_2 =(Mario si infetta da Carlo a casa).

2. Supponiamo che vengano sparati in sequenza, indipendentemente l'uno dall'altro, n colpi contro un bersaglio circolare di raggio unitario e che ciascun colpo raggiunga il bersaglio. Supponiamo anche che la posizione (in coordinate cartesiane) del punto del bersaglio colpito alla i-esima prova X_i, i=1, 2, . . . , n, sia un vettore aleatorio bidimensionale, uniformemente distribuito sul cerchio di raggio unitario. Sia R_i la distanza di X_i dal centro del bersaglio e Z_n la minima distanza dal centro realizzata dagli n colpi.
(a) Ricavare la distribuzione di probabilità di Z_n.
(b) Determinare $\mathrm{E}Z_n$.

3. Sia $\{X_{j,n};\ j=1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}\}$ una successione triangolare di variabili aleatorie tali che, per ogni n fissato, le $X_{j,n}$ sono indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro λ_n.
(a) Determinare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria:

$$Z_n = \min_{1\le j\le n} X_{j,n}.$$

(b) Studiare la convergenza in distribuzione di Z_n nei seguenti casi:
(*i*) $\lambda_n = 1/n,\ \forall n$;
(*ii*) $\lambda_n = 1/n^\mu,\ \mu>1,\ \forall n$;
(*iii*) $\lambda_n = \lambda$, con λ costante, $\forall n$.

126 27.11.97 SSDS (esonero)

a

1. Un'urna contiene dieci palline numerate: $0, 1, 2, \dots, 9$; si eseguono sei estrazioni con ripetizione. Sia l'evento E_r=(la cifra r compare esattamente due volte), $r=0,1,2,\dots,9$. Calcolare:
(a) $P(E_r)$,
(b) $P(E_r \cap E_s),\ r \neq s$,
(c) $P(E_r \cap E_s \cap E_t),\ r \neq s \neq t$,
(d) P(almeno una cifra compare esattamente due volte).

2. La famiglia Rossi ha due figli Marco e Luca. Nella scuola da loro frequentata c'è un'epidemia di morbillo: ciascuno dei due bambini ha, indipendentemente l'uno dall'altro, probabilità p di infettarsi a scuola. Sia X il numero aleatorio di bambini che contraggono la malattia in casa Rossi. Determinare la distribuzione di probabilità di X, sapendo che, se uno solo dei bambini si è infettato a scuola, l'altro contrae la malattia con probabilità p_1.

b

1. Un dado regolare viene lanciato sei volte: sia l'evento E_r=(la faccia r compare esattamente due volte), r=$0, 1, 2, \ldots, 6$. Calcolare:
(a) $P(E_r)$,
(b) $P(E_r \cap E_s),\ r \neq s$,
(c) $P(E_r \cap E_s \cap E_t),\ r \neq s \neq t$,
(d) P(almeno una cifra compare esattamente due volte).

2. La famiglia Rossi ha due figli Marco e Luca. Nella scuola da loro frequentata c'è un'epidemia di morbillo: ciascuno dei due bambini ha, indipendentemente l'uno dall'altro, probabilità α di infettarsi a scuola. Sia Y il numero aleatorio di bambini che contraggono la malattia in casa Rossi. Determinare la distribuzione di probabilità di Y, sapendo che, se uno solo dei bambini si è infettato a scuola, l'altro contrae la malattia con probabilità α_1.

c

1. Un gene è composto di due elementi, ciascuno dei quali può essere di tipo **A** oppure di tipo **a**. Nella popolazione esistono quindi tre tipi di geni: di tipo **AA**, **Aa**, **aa**. In fase di accoppiammento si scelgono due geni, indipendentemente l'uno dall'altro, e ciascuno di essi trasmette uno dei due caratteri a caso e indipendentemente l'uno dall'altro. Se inizialmente ciascuno dei tre tipi genetici viene selezionato con probabilità, rispettivamente, p, q, r, con $p+q+r=1$, quale sarà la distribuzione di probabilità dei tre tipi genetici alla generazione successiva?

2. Un gene è composto di due elementi, ciascuno dei quali può essere di tipo **A** oppure di tipo **a**. Nella popolazione esistono quindi tre tipi di geni: di tipo **AA**, **Aa**, **aa**. Sia N il numero totale di geni presenti nella popolazione e siano $p,\ q,\ r$, con $p+q+r=1$, le probabilità di selezionare, rispettivamente, un gene di tipo **AA**, **Aa**, **aa**. Scelti due geni a caso per l'accoppiamento, ciascuno di essi trasmette a caso uno dei due caratteri. Quale sarà la distribuzione di probabilità dei tre tipi genetici alla generazione successiva?

127 16.1.98 SSE(a-l)

1. In un'aula d'esame N studenti attendono di sostenere l'esame. Ciascuno di essi sarà ammesso alla prova orale solo dopo aver superato n test da eseguirsi in un certo ordine, ciscuno dei quali prevede una risposta del tipo vero o falso. Al primo test vengono sottoposti tutti gli studenti. Ai successivi solo quelli che abbiano risposto corrattemente al test precedente. Ciascuno studente sceglie a caso la risposta. Determinare:
(a) la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X definita come il numero di studenti ammessi alla prova orale;
(b) il valore atteso di X.

2. Date le variabili aleatorie X e Y indipendenti e somiglianti, ciascuna con distribuzione esponenziale di parametro ϑ, mostrare che $Z = X + Y$ e $U = X/Y$ sono indipendenti.

3. Sia data la successione $\{X_n;\ n{=}1, 2, \ldots\}$ di variabili aleatorie indipendenti e somiglianti, ciascuna con distribuzione di Poisson di parametro 1. Definiamo, per ogni $n \in \{1, 2, \ldots\}$:

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

(a) Determinare la distribuzione di S_n.
(b) Ricavare $\mathrm{E}(S_n)$, il valore atteso di S_n.
(c) Calcolare $P(S_3 > \mathrm{E}S_3)$.
(d) Ricorrendo al teorema del limite centrale, calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n > \mathrm{E}S_n).$$

128 22.1.98 SSDS (esonero)

1. Indichiamo con $X_{r,n},\ r{=}1, 2, \ldots, n,\ n$ v.a. discrete indipendenti così definite:

$$P(X_{r,n}{=}1) = P(X_{r,n}{=}-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \quad P(X_{r,n}{=}n) = \frac{1}{n}; \quad r{=}1, 2, \ldots, n.$$

Studiare la convergenza in distribuzione della successione di v.a. così definita:

$$Y_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{X_{r,n}}{n}.$$

2. Sia $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, una successione di v.a. indipendenti e X una v.a. indipendente dalle X_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, aventi rispettivamente le distribuzioni di probabilità seguenti

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 1 - 1/x^2, & x > 1 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

e X distribuzione esponenziale di parametro 1. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = \frac{(n-1)X + X_n}{n}.$$

129 28.1.98 SSA-SSE(m-z)

1. Ci sono n palline ed s scatole numerate ($n > s > 2$). Ogni pallina viene messa a caso in una scatola.

Calcolare la probabilità che la scatola 1 contenga x_1 palline e la probabilità condizionata che la scatola 2 contenga x_2 palline dato che la scatola 1 ne contiene x_1. Posto $X_i =$"numero di palline nella scatola i", verificare che la distribuzione marginale di X_1 e quella di X_2 condizionata a $X_1{=}x_1$ sono entrambe binomiali.

2. Siano X ed Y due v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione esponenziale. Calcolare

$$P\left(\left|\frac{X-Y}{X+Y}\right| < \frac{1}{2}\right).$$

3. Per ogni n naturale, la v.a. doppia (X_n, Y_n) è discreta con distribuzione data dalla tabella

		X_n: 0	1	
Y_n	0	a_n	$2a_n$	$3a_n$
	1	b_n	$1-3a_n-b_n$	$1-3a_n$
		a_n+b_n	$1-a_n-b_n$	1

Trovare:
(a) la covarianza di X_n e Y_n;
(b) la funzione di ripartizione congiunta della v.a. doppia (X_n, Y_n);
(c) la distribuzione di probabilità della v.a. $Z_n = X_n + Y_n$;
(d) il limite di $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$ e il limite delle successioni di v.a. (X_n, Y_n) e Z_n, nei due casi, a_n e b_n infinitesimi, e $a_n{=}b_n{=}n/(4n{+}1)$.

130 28.1.98 SSDS-SSE(a-l)

1. I tecnici di un osservatorio posto in una certa località classificano i giorni, sulla base delle condizioni atmosferiche, come piovosi e non piovosi. E' stato stabilito che la probabilità che le condizioni atmosferiche in un dato giorno siano uguali a quelle del giorno precedente è pari a p. Supponiamo che il primo di gennaio dell'anno xxxx non piova. Indichiamo con P_n la probabilità che non piova nell'n-esimo giorno dello stesso anno ($n{=}1, 2, \ldots, 365$). Calcolare la probabilità che il 2 gennaio non piova, che il 3 gennaio non piova e che il 4 gennaio non piova. Ricavare P_n per ogni $n \in \{1, 2, \ldots, 365\}$.

2. Sia $\{X_n;\ n{=}1, 2, \ldots\}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e somiglianti. Ciascuna X_n assume il valore 0 o 1, con $P(X_n{=}1) = p$. Per ogni n, definiamo la variabile aleatoria Y_n che assume il valore 0 quando X_n e X_{n+1} sono entrambe pari a 0 o a 1, mentre assume il valore 1 altrimenti. Sia inoltre

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

(a) Ricavare la distribuzione di Y_n e di (Y_n, Y_{n+1}).
(b) Dire se Y_n e Y_{n+1} sono indipendenti.
(c) Calcolare il valore atteso di Z_n, $\mathrm{E}(Z_n)$.

(d) Calcolare la varianza di Z_n, $\mathrm{Var}(Z_n)$.

3. Data la successione $\{X_n;\ n{=}1,2,\dots\}$ di variabili aleatorie indipendenti tale che, fissato n, X_n ha distribuzione esponenziale di parametro n^2. Definiamo, per ogni n:

$$Y_n = nX_n - 1 \qquad \text{e} \qquad Z_n = nX_n - n.$$

Studiare la convergenza delle succesioni di variabili aleatorie Y_n e Z_n.

131 11.2.98 SSA-SSE(m-z)

1. Anna e Bice giocano a dadi contro il banco. Anna lancia un dado, Bice ne lancia un altro e il banco un altro ancora. Anna vince sul banco se il suo dado dà un numero maggiore di quello del banco. Allo stesso modo, Bice vince sul banco se il suo dado dà un mumero maggiore di quello del banco (può anche accadere quindi che vincano sia Anna che Bice).

Calcolare la probabilità che Anna vinca, la probabilità che Bice vinca e la probabilità che sia Anna che Bice vincano.

2. Le v.a. U e V assumono valori ± 1. La loro distribuzione congiunta è individuata da:

$$\begin{gathered} P(U{=}-1) = P(U{=}1) = 1/2, \\ P(V{=}-1 \mid U{=}-1) = P(V{=}1 \mid U{=}1) = 1/3, \\ P(V{=}1 \mid U{=}-1) = P(V{=}-1 \mid U{=}1) = 2/3. \end{gathered}$$

(a) Trovare la probabilità che l'equazione in x, $x^2+Ux+V=0$, abbia almeno una radice positiva.
(b) Trovare il valor medio della radice più grande, sapendo che almeno una radice è reale.

3. Sia X una v.a. con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,2)$. Sia poi, per ogni n naturale,

$$Z_n = \begin{cases} X^n, & X < 1 \\ X^{1/n}, & X \geq 1 \end{cases}$$

Trovare la distribuzione di probabilità di Z_n e studiare la convergenza della successione di v.a. Z_n.

132 11.2.98 SSDS-SSE(a-l)

1. Un tiratore spara ripetutamente su un bersaglio finché non fa centro; indichiamo con p_n la probabilità che il tiratore non centra il bersaglio all'n-esimo tentativo, dato che i primi $n-1$ colpi non hanno centrato il bersaglio. Se $p_1{=}.6$, $p_2{=}.4$, $p_3{=}.75$, trovare la probabilità che il tiratore, avendo a disposizione tre prove:
(a) faccia centro al secondo tentativo;
(b) faccia centro al terzo tentativo;
(c) faccia centro dato che ha fallito il primo colpo;
(d) faccia centro al secondo tentativo dato che fa centro.

2. Sia U una v.a. uniformemente distribuita in $(0,1)$; per $a \in \mathbb{R}$ indichiamo con $[a]$ la parte intera di a e per $p \in (0,1)$ sia X una v.a. così definita:

$$X = 1 + \left[\frac{\log U}{\log(1-p)}\right].$$

Calcolare $\forall n \in \mathbb{N}$ le probabilità $P(X > n)$ e $P(X{=}n)$. Di quale distribuzione si tratta?

3. Data la v.a. X con distribuzione esponenziale di parametro λ definiamo, per ogni $n{=}1, 2, \ldots$, la v.a. Y_n tale che

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } X \geq n \\ X, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Ricavare, per ogni n fissato, la distribuzione di Y_n;
(b) Studiare la convergenza della successione di v.a. $\{Y_n;\ n{=}1, 2, \ldots\}$.

133 8.6.98 SSA-SSE(m-z)

1. Sia data una moneta che dà testa con probabilità p. La si lancia due volte. Se esce TC si dice che si ha un *successo* e ci si ferma; se esce CT si dice che si ha un *insuccesso* e ci si ferma; altrimenti, se esce cioè TT o CC, si ripete il doppio lancio finché si ottiene un *successo* o un *insuccesso* e ci si ferma.
(a) Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. $N =$"numero di doppi lanci effettuati".
(b) Calcolare la probabilità che la sequenza di doppi lanci termini con un *successo*.
(c) Calcolare il valor medio della v.a. N.
(d) Calcolare la probabilità del punto (b), nell'ipotesi che ora *successo* e *insuccesso* siano rispettivamente TT e CC.

2. Sia X una v.a. distribuita uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$ e Y un'altra v.a., indipendente da X, distribuita con legge di Poisson di parametro λ. Trovare la distribuzione di probabilità delle due v.a.

$$Z = X + Y \qquad \text{e} \qquad W = X - Y.$$

3. Sia data una successione di v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ indipendenti e distribuite con legge normale standardizzata. Studiare (utilizzando la legge forte dei grandi numeri e le proprietà della convergenza quasi certa) la convergenza delle seguenti successioni di v.a.:

$$U_n = \frac{X_0\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n X_j^4}}; \qquad V_n = \frac{X_0\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n X_j^{2k}}} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}; \qquad W_n = X_0^2 \frac{\sum_{j=1}^n X_{2j}^2}{\sum_{h=1}^n X_{2h-1}^4}.$$

134 10.6.98 SSDS-SSE(a-l)

1. Ciascuna delle ostriche raccolte nel mare intorno all'isola Smeralda contiene una perla con probabilità p, indipendentemente dalle sue simili. Ogni giorno un pescatore raccoglie ed apre in sequenza ostriche fino a quando non abbia trovato esattamente k perle, il numero necessario per comporre una collana. Sia X il numero di ostriche che non contengono perle tra quelle aperte in un certo giorno.
(a) Ricavare $P(X{=}r)$.
(b) Determinare il valore atteso e la varianza di X.
(c) Se $p{=}1{-}\lambda/k$, trovare il limite della distribuzione di X quando $k \to \infty$.

2. Supponiamo che X e Y siano variabili aleatorie indipendenti ed entrambe con distribuzione esponenziale di parametro λ. Poniamo $U{=}\min\{X, Y\}$ e $V{=}|X - Y|$.

(a) Ricavare:
(i) la distribuzione della variabile aleatoria U;
(ii) la distribuzione della variabile aleatoria V;
(iii) la distribuzione congiunta delle variabili aleatorie U e V.
(b) Dire se U e V sono indipendenti.

3. Data $\{X_n;\ n{=}1,2,\ldots\}$, una successione di variabili aleatorie indipendenti e somiglianti, ciascuna con funzione di ripartizione

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1 - x^{-\alpha}, & x > 1 \end{cases}$$

in cui α è una costante reale positiva. Sia $Z_n = n^{-1/\alpha}\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, per $n{=}1,2,\ldots$. Determinare per quali valori di α la successione di variabili aleatorie $\{Z_n;\ n{=}1,2,\ldots\}$ converge in distribuzione e ricavare la distribuzione della variabile aleatoria limite.

135 6.7.98 SSA-SSE(m-z)

1. Siano date n lampadine le cui durate di vita sono le variabili aleatorie $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro λ. Le lampadine via via che si rompono vengono classificate in tre gruppi:
(a) quelle per cui $Y < a$;
(b) quelle per cui $a < Y < b$;
(c) quelle per cui $Y > b$.

Calcolare la probabilità del seguente evento: (il numero di lampadine di durata minore di a è uguale ad h, il numero di lampadine di durata compresa fra a e b è uguale a j, il numero di lampadine di durata maggiore di b è uguale a k), con $0 \leq h, j, k \leq n$ e $h{+}j{+}k = n$.

2. Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e uniformi nell'intervallo $[0,1]$ e N una variabile aleatoria, indipendente da (X_1, X_2), che assume i valori 1 e 2 con probabilità rispettivamente p e q. Calcolare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

3. Siano $X_k,\ k \geq 1$, variabili aleatorie di Cauchy, indipendenti. Studiare, distinguendo i tre casi $\delta < 1,\ \delta = 1,\ \delta > 1$, la convergenza in distribuzione della seguente successione di variabili aleatorie:

$$U_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\delta}}.$$

136 6.7.98 SSDS-SSE(a-l)

1. Ogni anno la probabilità che un assicurato presso una certa compagnia di assicurazioni presenti una richiesta di risarcimento danni è λ, se l'assicurato è uomo, e μ, se l'assicurato è donna, indipendentemente da quanto successo negli anni precedenti. Supponiamo che tra gli assicurati vi sia un ugual numero di uomini e donne.
(a) Se viene scelto a caso un individuo tra gli assicurati, qual è la probabilità che presenti una richiesta di risarcimento danni

(i) quest'anno?
(ii) quest'anno e l'anno prossimo?
(b) Se scegliamo a caso un individuo tra gli assicurati che hanno presentato una richiesta di risarcimento quest'anno, qual è la probabilità che presenti una richiesta di risarcimento anche l'anno prossimo?
(c) Sapendo che un individuo scelto a caso tra gli assicurati ha presentato domanda di risarcimento per n anni consecutivi, qual è la probabilità che sia un uomo?

2. Supponiamo di lanciare in contemporanea un dado e una moneta, entrambi regolari, un numero indefininto di volte. Indichiamo con X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di lanci necessari affinché il risultato del lancio del dado sia 4, 5 oppure 6. Sia invece Y la variabile aleatoria che indica il numero di lanci richiesti affinché la moneta mostri la faccia "testa".
(a) Ricavare la distribuzione di X e Y.
(b) Ricavare la distribuzione di $Z = \max\{X, Y\}$.
(c) Determinare $P(Y \geq X)$, $P(Y \geq X \mid X = 2)$, $P(Y \geq X \mid Y = 2)$.

3. Sia $\{X_n;\ n=1, 2, \ldots\}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e somiglianti tale che, per ogni n,

$$P(X_n \geq x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ x^{-\lambda}, & x > 1 \end{cases}$$

con $\lambda > 1$ costante fissata.
(a) Calcolare la media e la varianza delle variabili aletorie X_n.
(b) Ricavare la distribuzione di $Y_n = \log X_n$.
(c) Poniamo $Z_n = (X_1 \cdot X_2 \cdots X_n)^{1/n}$. Mostrare che la successione di variabili aleatorie $\{Z_n;\ n=1, 2, \ldots\}$ converge quasi certamente e determinarne il limite.

137 18.9.98 SSA-SSE(m-z)

1. Due sonde spaziali vengono lanciate verso un pianeta il cui emisfero settentrionale è meno accidentato di quello meridionale. L'atterraggio è la fase più delicata. Si sa che la probabilità condizionata che la sonda numero uno atterri bene, se atterra sull'emisfero settentrionale, è 7/10, mentre la probabilità condizionata che la sonda numero uno atterri bene, se atterra sull'emisfero meridionale, è 5/10. Per la sonda numero due, di costruzione differente, le analoghe probabilità valgono 6/10 e 4/10. Per ciascuna delle due sonde, indipendentemente l'una dall'altra, la probabilità di atterrare sull'emisfero settentrionale è 1/3.
(a) Calcolare la probabilità condizionata che la sonda i atterri sull'emisfero settentrionale dato che essa atterra bene, con $i=1, 2$.
La missione prevede che le due sonde eseguano congiuntamente un certo esperimento, possibile solo se esse atterrano sullo stesso emisfero. La missione quindi fallisce senz'altro se le sonde atterrano su emisferi diversi. Se invece atterrano sullo stesso emisfero, l'esito della missione, cioè successo o fallimento, dipende dal risultato dell'esperimento. Si sa inoltre che la probabilità che la missione abbia successo, se le due sonde atterrano sullo stesso emisfero, è 1/2.
(b) Calcolare la probabilità, non condizionata, che la missione abbia successo.

2. Le v.a. X e Y sono normali standardizzate ed indipendenti. Trovare:

(a) la distribuzione della v.a. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$;
(b) la distribuzione congiunta di (X, R);
(c) la distribuzione condizionata di X dato $R = r$.

3. Si consideri la successione di v.a. indipendenti e somiglianti $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, con X_n distribuita con legge uniforme sui due punti -1 e $+1$. Sia poi, per ogni n,

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.
(b) Trovare la distribuzione di probabilità di Y_n, per n fissato.

138 18.9.98 SSDS-SSE(a-l)

1. Un'urna contiene 5 palline bianche e 6 rosse. Si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna. Dopo averne controllato il colore, le due palline vengono introdotte di nuovo nell'urna insieme ad altre due palline identiche a quelle estratte. Al termine di tale operazione l'urna conterrà 13 palline. Successivamente viene effettuata una seconda estrazione di due palline, ancora una volta in bloccco. Indicando con A l'evento che si verifica se le due palline estratte nella seconda estrazione sono entrambe bianche:
(a) ricavare la probabilità dell'evento A;
(b) condizionatamente al fatto che l'evento A si sia verificato, calcolare la probabilità che le due palline estratte alla prima estrazione siano una bianca e una rossa.

2. Sia (X, Y) una v.a. doppia con funzione di densità congiunta

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c\,y/(1 + y^2), & 0 < y \leq 1 \quad \text{e} \quad y^2 < x \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare la costante c.
(b) Ricavare le funzioni di densità marginali di X e Y e stabilire se le due v.a. sono indipendenti, giustificando la risposta.

3. Si consideri la successione di v.a. indipendenti e somiglianti $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, ciascuna con funzione di densità

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} n(x + 1)/2, & -1/n < x \leq 1/n \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare, se esistono:
(a) il limite in distribuzione della successione $\{X_n\}$.
(b) il limite in distribuzione della successione $\{Y_n\}$, tale che

$$Y_n = n(X_n + 1/n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

139 26.11.98 STAT-SSDS (esonero)

1. Date tre urne, U_1, U_2, U_3, contenenti ciascuna 3 palline bianche e 2 nere, dall'urna U_1 si estraggono senza ripetizione 2 palline, che vengono messe una in U_2 e l'altra in

U_3. Calcolare la probabilità che, estraendo una pallina da ciascuna delle tre urne, così modificate, si ottengano 3 palline nere.

2. Le pagine di un libro contengono errori ciascuna con probabilità 1/6, indipendentemente l'una dall'altra. Qual è il numero minimo $\overline{n}$ di pagine per avere probabilità superiore a 0,95 che almeno una pagina non contenga errori?

Si scelga con probabilità p il numero $\overline{n}$ così trovato e con probabilità $q = 1 - p$ il numero $\overline{n} - 1$. Qual è il valore di p per il quale la probabilità di avere almeno una pagina senza errori risulti esattamente uguale a 0,95?

140 25.1.99 STAT-SSDS (esonero)

1. Sia $\{X_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, una successione di v.a. indipendenti e somiglianti, esponenziali di parametro λ. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n + X_{n+1}}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}.$$

2. Sia X una v.a. uniforme in $(0,1)$ e sia, per $\alpha \in \mathbb{R}_+$, Y_α una famiglia di v.a. aventi funzione di ripartizione

$$F_\alpha(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ 1 - y^{-\alpha}, & y > 1 \end{cases}$$

Studiare, per $\alpha \longrightarrow 0$ e per $\alpha \longrightarrow \infty$, la convergenza di

$$Z_\alpha = \frac{\alpha X}{\alpha - X} Y_\alpha$$

141 25.1.99 SSA-SSE(m-z)

1. Un'urna contiene sedici palline. Alcune di queste sono arancioni e le altre bianche. Trovare quante sono quelle arancioni, sotto ciascuna delle seguenti ipotesi:
(a) se si estraggono a caso e in blocco due palline, la probabilità che esse siano dello stesso colore è uguale alla probabilità che siano di colori diversi;
(b) come al punto (a), tranne che le due estrazioni sono con ripetizione.

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme nello intervallo $(0,1)$. Calcolare

$$P\left(\frac{X}{X+Y} < t \mid X + Y < 1\right), \qquad t\in\mathbb{R}.$$

3. Siano $X_1, \ldots, X_n \ldots$ v.a. indipendenti e uniformi nell'intervallo $(0,1)$. Sia

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\{I_{(X_i<x)} - x\}}{\sqrt{n}},$$

con $x\in(0,1)$ e $I_{(X_i<x)}$ la funzione indicatrice dell'evento $(X_i < x)$.
(a) Trovare la funzione caratteristica di U_n.
(b) Studiare il limite in distribuzione di U_n.

142 25.1.99 SSE(a-l)

1. Alessandro e Betta partecipano in coppia ad un quiz televisivo. Un meccanismo aleatorio stabilisce chi dei due deve rispondere a ciascuna domanda, sceglie Alessandro con probabilità $p_A = 1/3$ e Betta con probabilità $1 - p_A = 2/3$. Alessandro risponde esattamente a ciascuna domanda con probabilità $3/5$, Betta con probabilità $1/10$.
(a) Con che probabilità la coppia risponde esattamente ad una domanda?
(b) Con che probabilità ha risposto Betta se la risposta è sbagliata?
(c) Quale dovrebbe essere il valore di p_A affinché la probabilità del punto (b) sia pari a $1/2$?

Il punto che segue è opzionale.
Alla coppia viene fornita una dotazione iniziale di 2 milioni; ad ogni risposta errata si perde un milione, mentre ad ogni risposta esatta la dotazione rimane invariata. Il gioco termina alla terza risposta esatta (o quando sono finiti i soldi) e la coppia vince tutti i soldi che le sono rimasti.
(d) Determinare la distribuzione dell'ammontare della vincita.

2. Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia con distribuzione uniforme in $(0,1) \times (0,1)$. Determinare le distribuzioni delle v.a.

$$U = \begin{cases} 1, & \text{se } Y > 2X \\ 0, & \text{se } Y \leq 2X \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V = \begin{cases} 1, & \text{se } Y < 1 - X \\ 0, & \text{se } Y \geq 1 - X \end{cases}$$

e della loro somma $U + V$.

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti, con X_n uniforme sul segmento $(1, n)$. Si studi la convergenza della successione $Z_n = X_n/n^2$.

143 27.1.99 STAT-SSDS

1. Da un'urna contenente 4 palline numerate da 1 a 4 si estraggono prima due palline bernoullianamente e poi due palline in blocco. Trovare la probabilità che la somma delle 4 palline estratte sia 7.

2. In un ufficio c'è uno sportello che serve i clienti con durate di servizio indipendenti esponenziali di parametro 1. In un secondo ufficio ci sono tre sportelli nei quali le durate del servizio sono indipendenti esponenziali di parametro α.

Calcolare la distribuzione di probabilità del tempo impiegato per completare il servizio di tre clienti nel primo ufficio e quella nel secondo ufficio. Trovare poi per quale valore di α il tempo medio è uguale per i due uffici e confrontare, per tale valore di α, le due varianze.

3. X e Y sono v.a. indipendenti uniformemente distribuite in $(0,1)$. Studiare la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{X^n}{X^n + Y^n}.$$

144 8.2.99 SSE(m-z)

1. Al castello di Camelot, n cavalieri sono seduti intorno alla Tavola Rotonda. Tra di loro ci sono re Artù, Lancillotto e Galvano. Intorno alla tavola ci sono n sedie e ciascuno dei cavalieri ha scelto a caso il posto in cui sedersi.
(a) Qual è la probabilità che nè Lancillotto nè Galvano siedano accanto a re Artù?
(b) Sapendo che nessuno dei due è seduto accanto ad Artù, qual è la probabilità che Lancillotto e Galvano siano seduti uno accanto all'altro?

2. La v.a. doppia (X, Y) è assolutamente continua con densità

$$f(x, y) = x\mathrm{e}^{-x}, \quad 0 < y < 1/x.$$

(a) Trovate le due distribuzioni marginali.
(b) Calcolate $P(XY<z)$ per $z\in\mathbb{R}$, distinguendo i tre casi $z\leq 0$, $0<z<1$, $z\geq 1$.

3. Siano $X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n, \dots$ v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione esponenziale di parametro 1, e sia, per ogni $n\in\mathbb{N}$,

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{Y_1 + \cdots + Y_n}.$$

(a) Studiate la convergenza di Z_n.
(b) Trovate la densità di Z_n
[*Suggerimento*: se U e V sono indip. ed ass. cont., allora U/V è ass. cont con densità $f_{U/V}(t) = \int_{\mathbb{R}} |x|\, f_U(tx) f_V(x)\, dx$].

145 8.2.99 SSE(a-l)

1. La moneta M_1 dà testa con probabilità 0,3, la moneta M_2 con probabilità 0,5 e la moneta M_3 con probabilità 0,7. Viene scelta a caso una moneta e lanciata finché non si ottiene testa per la seconda volta.

Sapendo che la seconda testa si è avuta al quinto tentativo, stabilire quale delle monete ha la probabilità più alta di essere stata lanciata.

2. Sia (X,Y) una variabile aleatoria doppia a componeneti indipendenti e tale che $P(X{=}-1) = 2/3$ e $P(X{=}1) = 1/3$, mentre $Y \sim \mathrm{U}(0,2)$. Determinare la distribuzione della v.a. $X+Y$.

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti ciascuna con densità

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n \\ \frac{1}{2}\exp\{\frac{x-n}{2}\}, & x > n \end{cases}$$

(a) Determinare $\mathrm{E}X_n$ e $\mathrm{Var}(X_n)$;
(b) studiare il limite in distribuzione della successione di v.a.

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - k - 2}{\sqrt{n}}.$$

146 10.2.99 STAT-SSDS

1. Quattro concorrenti della stessa forza ripetono una gara che è stata annullata. Qual è la probabilità che il numero di concorrenti che occupano gli stessi posti della graduatoria precedente sia uguale a due?

2. Due punti scelti a caso, indipendentemente l'uno dall'altro, in un intervallo di ampiezza uno, lo dividono in tre sottointervalli. Trovare la distribuzione di probabilità della lunghezza del più grande dei tre sottointervalli.

3. Siano X e Y due v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro λ, $0<\lambda<\pi$. Studiare la convergenza, per $\lambda \longrightarrow 0$, di

$$Z_\lambda = (X-Y)\,\mathrm{sen}\lambda.$$

147 16.2.99 SSA

1. In ogni prova una cavia può andare verso destra o verso sinistra. Alla prima prova va a destra con probabilità 1/2 e a sinistra con probabilità 1/2. Nelle prove successive la probabilità di andare verso destra dipende solo da quello che è successo nella prova precedente, in particolare:
- se alla prova $(n-1)$-esima la cavia è andata a destra, alla n-esima prova va di nuovo a destra con probabilità $P(D_n \mid D_{n-1}) = 0,6$;
- se alla prova $(n-1)$-esima la cavia è andata a sinistra, alla n-esima prova va a destra con probabilità $P(D_n \mid S_{n-1}) = 0,7$.

Trovare $P(D_2)$, $P(D_n)$ e $\lim_{n\to\infty} P(D_n)$.

2. Siano X, Y, Z tre v.a. indipendenti con identica distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Trovare le distribuzioni delle v.a.

$$U = \frac{X}{X+Y}, \qquad V = Y + Z, \qquad W = \frac{X}{X+Y+Z}.$$

3. Siano $X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, \ldots$ v.a. indipendenti, identicamente distribuite con media 0 e varianza σ^2. Mostrare che, per $n \longrightarrow \infty$,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_n^2}}$$

converge in distribuzione alla normale standard.
[*Suggerimento*: si consiglia di utilizzare il teorema del limite centrale e la legge debole dei grandi numeri.]

148 7.6.99 SSA-SSDS-STAT

1. La scatola A contiene 5 palline nere e 3 bianche. La scatola B contiene 3 palline nere e 2 bianche. Si estrae una pallina da ogni scatola. Determinare:
(a) La probabilità che entrambe le palline siano nere.
(b) La probabilità che una pallina sia bianca ed una sia nera.
(c) La probabilità che la pallina bianca provenga dalla scatola A, se le due palline sono una bianca ed una nera.
(d) La probabilità che entrambe le palline siano nere, avendo prima trasferito una pallina dalla scatola A alla scatola B.

2. Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia con funzione di densità congiunta:

$$f(x, y) = k\, \mathrm{e}^{-\lambda y}, \quad 0 \le x \le y.$$

(a) Determinare la costante k.
(b) Determinare le funzioni di densità marginali.
(c) Determinare la funzione di densità della variabile aleatoria $Y|X$.
(d) Determinare $\mathbb{E}[Y|X]$.

3. Siano $\{X_n\}$ ed $\{Y_n\}$ due successioni di v.a. La prima sia costituita da v.a. indipendenti con distribuzione uniforme in $(0,1)$. La funzione di densità di Y_n sia

$$f_{Y_n}(y) = \begin{cases} n(1-y)^{n-1}, & 0<y<1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Verificare che le successioni $\{V_n\}$ e $\{W_n\}$ convergono in distribuzione alla stessa v.a., dove

$$V_n = n[1 - \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}] \quad \text{e} \quad W_n = nY_n.$$

149 14.6.99 SSE

1. Un dado bilanciato viene lanciato più volte. Si considerano le seguenti procedure di arresto:
(a) la serie di lanci termina appena si ottiene un risultato uguale al precedente;
(b) la serie di lanci termina appena si ottiene un risultato uguale ad uno dei precedenti.
Per ciascuno dei due casi (a) e (b), calcolare la probabilità di lanciare il dado esattamente x volte, con $x = 2, 3, \ldots$

2. Sia (X,Y) una variabile aleatoria doppia con distribuzione uniforme sul quadrato $(0,1) \times (0,1)$. Determinare la distribuzione della variabile aleatoria

$$Z = \begin{cases} \min\{X,Y\}, & \text{se } X+Y \le 1 \\ \max\{X,Y\}, & \text{se } X+Y > 1 \end{cases}$$

3. Siano $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ due successioni di variabili aleatorie. Per ogni n, X_n è discreta con distribuzione

$$P(X_n = \tfrac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

e $Y_n | X_n = x \sim \text{Unif}(0,x)$.

Studiare la convergenza in distribuzione della successione Y_n.

150 30.6.99 SSDS-STAT

1. Lanciando n volte una moneta regolare, calcolare la probabilità di avere:
(a) esattamente due T;
(b) esattamente due T e siano consecutive;
(c) esattamente due T e non siano consecutive.

2. Si divide l'intervallo $(0,1)$ in due intervallini, con un punto scelto a caso, e si considerano due cerchi che hanno raggi di lunghezza uguale ai due intervallini. Trovare la distribuzione di probabilità della differenza fra l'area del cerchio più grande e quella del cerchio più piccolo.

3. X_n e Y_n, $n \in \mathbb{N}$, sono indipendenti, la prima Unif in $(0, n+1)$, la seconda Espon $\left(\frac{1}{n-1}\right)$. Trovare il limite in distribuzione di

$$Z_n = \frac{Y_n}{X_n}.$$

151 1.7.99 SSE

1. Una scatola contiene 5 monete $M_1, \dots, M_5$ che danno testa con probabilità diverse:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 1/4, \quad p_3 = 1/2, \quad p_4 = 3/4, \quad p_5 = 1,$$

dove, per $i=1,\dots,5$, p_i è la probabilità di ottenere testa lanciando la moneta M_i.
Si estrae a caso una moneta e la si lancia 2 volte.
(a) Con che probabilità si ottiene testa al primo lancio?
(b) Al primo lancio esce testa. Qual'è la probabilità che la moneta scelta sia M_i, $i = 1,\dots,5$?
(c) Qual è la probabilità che al secondo lancio esca croce, se è uscita testa al primo lancio?

2. Trovare la funzione di ripartizione F_Z della variabile aleatoria

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

dove X e Y sono indipendenti con $X \sim \text{Espon}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$.
Interpretare la discontinuità di $F_Z(z)$ nel punto $z=1$.

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con

$$X_1 \sim \text{Binom}(1,p), \quad X_2 \sim \text{Binom}(2,p), \quad \dots \quad , \quad X_n \sim \text{Binom}(n,p), \quad \dots$$

Studiare la convergenza in distribuzione di

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)}{n}.$$

[*Suggerimento*: Si ricordi che se $Z_k \sim \text{Binom}(k,p)$, per $k \to +\infty$ si ha $\dfrac{Z_k - \mathbb{E}Z_k}{\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(Z_k)}} \xrightarrow{\text{d}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.]

152 6.7.99 SSA

1. Si considerino le seguenti cinque monete: M_1 ed M_2 hanno testa su entrambe le faccie, M_3 ha croce su entrambe le faccie, M_4 e M_5 sono monete regolari. Si scelga una moneta a caso e la si lanci due volte.
(a) Calcolare la probabilità che al primo lancio la faccia inferiore sia testa, sapendo che la faccia superiore è anch'essa testa.
(b) Calcolare la probabilità che al secondo lancio la faccia inferiore sia testa, sapendo che in entrambi i lanci la faccia superiore è stata testa.

2. Siano X, Y, e Z variabili aleatorie indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,1)$. Siano $U=XY$ e $V=Z^2$. Determinare:
(a) Le funzioni di ripartizione delle variabili aleatori U e V.
(b) La funzione di densità congiunta di (U,V).

3. Sia $\{X_n\}$ una successioni di v.a. di Poisson di parametro λ_n, dove $\{\lambda_n\}$ è una successione divergente. Sia $Z_n = (X_n - \lambda_n)/\sqrt{\lambda_n}$. Studiare la convergenza in distribuzione della successione di v.a. $\{Z_n\}$.

[*Suggerimento*: Utilizzare la seguente approssimazione nell' intorno del punto $x = 0$: $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$]

153 15.9.99 SSA-SSDS-STAT

1. Si sappia che le donne in una specifica famiglia possono essere portatrici di emofilia con probabilità 1/2. Se la madre è portatrice, allora i suoi figli maschi, indipendentemente l' uno dall' altro, possono essere emofiliaci, ciascuno con probabilità 1/2. Se la madre non è portatrice, allora i figli maschi non sono emofiliaci.
(a) Se il primo figlio maschio di una donna nella famiglia non è emofiliaco, qual' è la probabilità che anche il secondo non sia emofiliaco?
(b) Se i primi due figli maschi di una donna della famiglia non sono emofiliaci, qual'è la probabilità che la madre sia portatrice di emofilia?

2. Siano X ed Y due variabili aleatorie con distribuzione congiunta uniforme nella regione di piano S limitata dalle rette $y{=}x{+}1$, $y{=}x{-}1$, $y{=}1{-}x$ and $y{=}{-}x{-}1$.
(a) Determinare la funzione di densità congiunta $f(x, y)$ di (X, Y).
(b) Determinare la densità marginale $f_Y(y)$.
(c) Determinare la densità condizionata $f_{X|Y}(x|y)$ per X dato $Y{=}y$.

3. Sia $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ una variabile aleatoria normale standardizzata, e si indichi la sua funzione di ripartizione con $\Phi(\cdot)$ Si definisca una successione di variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots$ come segue:

$$X_1{=}X_3{=}X_5{=}\cdots{=}Z$$
$$X_2{=}X_4{=}X_6{=}\cdots{=}{-}Z.$$

(a) Verificare se X_n converge in distributione ad una variabile aleatoria.
(b) Verificare se X_n converge in probabilità ad una variabile aleatoria.

154 21.9.99 SSE

1. Si effettuano due lanci di quattro monete bilanciate. Calcolare la probabilità che
(a) nei due lanci si ottenga lo stesso numero di teste;
(b) ciascuna moneta dia lo stesso risultato nei due lanci.

2. Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia con funzione di densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}\mathrm{e}^{-y}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, & \text{se } 0{<}x{<}y \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare le funzioni di densità di X e Y e stabilire se sono indipendenti.

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie discrete ed indipendenti, dove X_n ha distribuzione uniforme sui due punti $-\frac{1}{2^n}$ e $\frac{1}{2^n}$.

Studiare la convergenza della successione $\{X_n\}$ nelle quattro forme note: in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in media r-esima.

155 8.11.99 SSE (esonero)

Gambadilegno sa che la cassaforte del Banco di Topolinia ha una combinazione costituita da 6 cifre, di cui due sono uguali a 0, due uguali a 1 e due uguali a 2, ma non sa quali. Se la combinazione inserita è giusta la cassaforte si apre, altrimenti suona l'allarme e Gambadilegno deve scappare.
(a) Calcolare la probabilità p che Gambadilegno riesca ad aprire la cassaforte.
Per comprare un anello alla sua fidanzata Trudy, Gambadilegno ha bisogno di 5000 dollari e decide di rapinare banche finché non raggiunge la cifra necessaria. A Topolinia ogni banca ha 1000 dollari in cassaforte e una cassaforte dello stesso tipo di quella del Banco di Topolinia.

Se Gambadilegno riesce ad aprire una cassaforte prende i 1000 dollari, altrimenti, scappando, lascia un indizio. Dopo aver trovato 2 indizi Topolino lo arresta.
(b) Calcolare la probabilità che Gambadilegno riesca a comprare l'anello a Trudy.
(c) Sapendo che Trudy ha avuto l'anello, calcolare la probabilità che Gambadilegno abbia sbagliato combinazione 1 volta.
[*Nota*: è sufficiente risolvere i punti (b) e (c) considerando p generico invece del valore trovato in (a).]

1. Un fumatore ha due scatole di cerini e per usare un cerino prende a caso una delle due scatole.

All'inizio ci sono tre cerini in ciascuna scatola; quando una scatola si esaurisce, nella seconda ci possono essere 1 o 2 o 3 cerini. Quali sono le probabilità dei tre eventi? (La somma deve essere 1.)

2. Si hanno tre urne contenenti ciascuna tre palline bianche e due nere. Si estraggono due palline dalla prima urna e si mettono una in ciascuna delle altre urne. Calcolare la probabilità che, estraendo a caso una pallina da ciascuna delle tre urne così modificate, si ottengano tre palline nere.

156 16.11.99 SSDS-STAT (esonero)

1. Un fumatore ha due scatole di cerini e per usare un cerino prende a caso una delle due scatole. All'inizio ci sono tre cerini in ciascuna scatola; quando una scatola si esaurisce nella seconda ci possono essere 1 o 2 o 3 cerini. Quali sono le probabilità dei tre eventi? (La somma deve essere 1.)

2. Si hanno tre urne contenenti ciascuna tre palline bianche e due nere. Si estraggono due palline dalla prima urna e si mettono una in ciascuna delle altre urne. Calcolare la probabilità che, estraendo a caso una pallina da ciascuna delle tre urne così modificate, si ottengano tre palline nere.

157 7.12.99 SSE (esonero)

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione Uniforme su $(-1, 1)$.
(a) Trovare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Y = |X| - X$.
(b) Y è assolutamente continua? Interpretare eventuali discontinuità della sua funzione di ripartizione.

(c) Calcolare $P(Y > 0)$.

158 18.1.2000 SSE (esonero)

Siano $X_1, \dots, X_n, \dots$ variabili aleatorie indipendenti e somiglianti con distribuzione esponenziale di parametro λ.
(a) Dimostrare che

$$W_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n/\lambda}{\sqrt{n}/\lambda}$$

converge in distribuzione alla normale standardizzata.
(b) Sia ora $\{Z_n\}$ una successione di v.a. indipendenti dalle W_n, tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Z_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} W_n$. Studiare il limite in distribuzione della successione

$$V_n = W_n - Z_n.$$

159 22.1.2000 SSDS-STAT (2° esonero)

1. La v.a. (X, Y) è uniformemente distribuita nel triangolo di vertici (0,0), (1,0), (1,1). Trovare la distribuzione della v.a. $Z = X + Y$.

2. Per $n=1, 2, \dots$, la v.a. X_n ha funzione di densità

$$f_{X_n} = n(1-x)^{n-1}, \quad 0<x<1.$$

Studiare la convergenza della successione di v.a. $Y_n = nX_n$.

160 24.1.2000 SSE

1. Una macchina che produce CD ogni tanto ne produce di difettosi. In particolare, per ogni CD prodotto, e indipendentemente da tutti gli altri, la probabilità che esso sia difettoso è p.

All'edicola del sig. Bianchi vengono consegnati n CD prodotti da tale macchina e questi n CD vengono venduti tutti ad altrettanti clienti. Ognuno dei clienti poi, nel caso che il suo CD risulti difettoso, decide di restituirlo all'edicola oppure no a seconda che ottiene testa oppure croce lanciando una moneta.

Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$R = \text{“numero di CD restituiti all'edicola.}$$

2. Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia assolutamente continua con funzione di densità

$$f(x, y) = kxy^2, \quad x \text{ e } y>0 \text{ e } x+y<1.$$

(a) Determinare la costante di normalizzazione k.
(b) X e Y sono indipendenti?
(c) Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. $X + Y$.

3. Siano $X_1, \dots, X_n \dots$ variabili aleatorie indipendenti e somiglianti con media 0 e varianza 1. E sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \frac{(X_1 + \cdots + X_n)^2}{n}.$$

(a) Calcolare la media di Y_n.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}$.
(c) Trovare la distribuzione di probabilità di Y_n nell'ipotesi particolare che le v.a. X_n abbiano distribuzione normale standardizzata.

161 21.1.2000 SSDS-STAT

1. In un gioco si vince se in due lanci di un dado si ottiene una somma superiore a 6; se si vuole si può annullare il primo lancio e ripeterlo. Un giocatore al primo lancio ottiene 4. Gli conviene annullarlo o no?

2. Le v.a. X e Y sono indipendenti ed Espon(λ). Posto $U=X,\ V=X+Y$, trovare le f.d. delle v.a. (U,V), U, V.

3. Date le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ indipendenti ed Espon(λ), studiare la convergenza della successione di v.a.

$$Y_n = \min\{X_1, 2X_2, \ldots, nX_n\}.$$

162 2.2.2000 SSA

1. Sia $\Omega=\mathbb{R}$ e sia $\mathcal{A}$ una sigma algebra su Ω. E sia, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $S_n\in\mathcal{A}$. Si definisca, per ogni $n\in\mathbb{N}$, una misura di probabilità $P_n(\cdot)$ come segue: $P_n(A) = |A\cap S_n|/n$, dove $A\in\mathcal{A}$. Si definisca inoltre $P(\cdot)$ come segue: $P(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A)$. Verificare se $P(\cdot)$ è una misura di probabilità.

2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Sia $Y=0$ se $X<1/2$ e $Y=2X$ altrimenti. Determinare la funzione di ripartizione di Y e la sua media.

3. Sia data una variabile aleatoria discreta X che assume valori -1 e 1, ciascuno con probabilità 1/2. Si definisca:

$$X_n = \begin{cases} |X|\,, & \text{con probab. } 1-\dfrac{1}{n} \\ \mathrm{e}^n, & \text{con probab. } \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

(a) X_n converge ad $|X|$ in probabilità?
(b) X_n converge ad $|X|$ in distribuzione?
(c) $\mathbb{E}(|X|-X_n)^2$ converge a 0?

163 7.2.2000 SSE

1. Il numero di clienti che entrano in un negozio è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro $\mu>0$. Ciascun cliente lancia un dado: se esce il numero 6 compra un articolo, altrimenti va via senza acquistare nulla.

Trovare la distribuzione di probabilità del numero complessivo di articoli acquistati, il suo valore atteso e la sua varianza.

2. Sia λ un numero reale positivo e siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti, entrambe con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, \lambda)$.

Determinare il valore della costante $c > 1$ tale che la probabilità dell'evento aleatorio

$$\left(\frac{\lambda}{c} < \max\{X_1, X_2\} - \min\{X_1, X_2\} < \lambda\right)$$

sia esattamente uguale a 1/4.

3. Sia ϑ una costante reale positiva e siano $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti e somiglianti con densità

$$f(x) = \frac{3\vartheta^3}{x^4}, \qquad x > \vartheta.$$

Studiare la convergenza della successione $U_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

164 11.2.2000 SSDS-STAT

1. In una tavola rotonda ci sono n posti. Due persone scelgono a caso il loro posto (naturalmente senza ripetizione). Trovare la distribuzione di probabilità, per n pari e per n dispari, della distanza minima fra le due persone.

2. La variabile doppia (X, Y) è uniformemente distribuita nel triangolo di vertici (-1,0), (0,1), (1,0). Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. $Z = Y/X$.

3. Siano X e Y due v.a. indipendenti, distribuite rispettivamente come una geometrica di parametro p e una esponenziale di parametro $1/p$. Studiare la convergenza della famiglia di v.a.

$$Z_p = \frac{X-1}{Y}$$

per $p \to 0,\ p \to 1$.

165 21.2.200 SSA

1. Una fabbrica produce circuiti stampati di cui il 6% ha un difetto di tipo A ed il 4% ha un difetto di tipo B. I due difetti non possono essere presenti contemporaneamente in uno stesso circuito. Prima di mettere in vendita i circuiti prodotti viene fatta un' ispezione elettronica, che individua correttamente come difettosi il 95% dei circuiti con il difetto A ed il 75% dei circuiti con il difetto B, ma individua incorrettamente come difettosi il 10% dei circuiti che non lo sono. Tutti i circuiti identificati come difettosi vengono eliminati, e gli altri vengono messi in vendita.
(a) Con che probabilità un circuito con difetto di tipo A, viene messo in vendita? E uno con difetto di tipo B? E uno non difettoso?
(b) Con che probabilità un circuito scelto a caso viene messo in vendita?
(c) Dato che un circuito è stato messo in vendita, qual è la probabilità che sia difettoso?
(Per uniformità di notazione si indichino con A, B e C gli eventi: "Circuito con difetto A", "Circuito con difetto B" e "Circuito non difettoso". Sia V l'evento "Circuito messo in vendita" e $\overline{V}$ l'evento "Circuito eliminato")

2. Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia uniformemente distribuita sul triangolo T con vertici (-1,0), (0,1) e (1,0).
(a) Determinare $P\left(Y \leq \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)$.
(b) Determinare $f_{Y|X}(y|x)$.

3. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti aventi funzione di densità

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x\mathrm{e}^{-x^2}, & x > 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Verificare se la successione $Y_n = [\min\{X_1, \ldots, X_n\}]^n$ converge in distribuzione e determinare l'eventuale variabile aleatoria limite.

166 7.6.200 SSDS-STAT

1. Un tavolo quadrato è ricoperto da nove piastrelle, anch'esse quadrate, aventi costi differenti. Precisamente, le quattro piastrelle situate agli angoli costano L.3000 ciascuna, mentre tutte le altre L.2000 ciascuna. Se ne rompono due a caso. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. X = "costo totale del danno avuto.

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti, aventi distribuzione esponenziale di parametro λ. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = \frac{X}{X + 2Y}.$$

3. La v.a. (X_n, Y_n) ha funzione di densità

$$f_n = n(n-1)(y-x)^{n-2}, \quad 0 < x < y < 1.$$

Studiare la convergenza della successione $Z_n = X_n + Y_n$.

167 16.6.2000 SSA-SSE(m-z)

1. Siano date due urne U_1 e U_2 di uguale composizione e sia N il numero di palline di ciascuna urna e p la probabilità di estrarre una pallina bianca (con $0 < p \leq 1$). Si si estraggano da U_1 due palline con reimbussolamento e si inseriscano in U_2 due palline di colore uguale a quelle estratte. Successivamente si estragga da U_2 una pallina che risulta bianca e si indichi con B_2 questo evento. Indicando con H il numero aleatorio di palline bianche estratte da U_1,
(a) si determini la distribuzione

$$P(H = j | B_2), \quad j = 0, 1, 2;$$

(b) si calcoli

$$\mathbb{E}(H|B_2);$$

(c) si studi il comportamento della distribuzione (a) per $N \to \infty$ e al variare di p.

2. Si dia la seguente funzione

$$f(x,y) = k\frac{1}{(1+x^2+y^2)^3/2}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

(a) trovare per quali valori di k si tratta di una funzione di densità;
(b) verificare che le marginali di (X,Y) sono delle distribuzioni di Cauchy;
(c) le componenti X e Y sono v.a. indipendenti?

3. Siano $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ variabili aleatorie esponenziali indipendenti e identicamente distribuite di parametro $\mu>0$. Sia

$$Y_n = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}X_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_j)}},$$

(a) trovare la funzione caratteristica $H_n(\alpha)$ di Y_n;
(b) studiare il limite per $n\to\infty$ del logaritmo di $H_n(\alpha)$;
(c) a quale v.a. converge in distribuzione Y_n?

168 16.6.2000 SSE(a-l)

1. Mario paga 1 dollaro per partecipare al seguente gioco a premi: vengono lanciati 3 dadi e Mario vince 1 dollaro se esce un solo 6, vince 2 dollari se escono due 6 mentre vince 8 dollari se tutti e tre i dadi mostrano il risultato 6. Il gioco viene considerato equo se la vincita attesa è pari a zero.

Stabilire se Mario sta giocando ad un gioco equo. Altrimenti, quanto dovrebbe ricevere Mario nel caso di vincita con tre 6 affinché il gioco sia equo?

2. Sia $X_1,...,X_n,...$ una successione di variabili aleatorie indipendenti tali che la v.a. X_n abbia la seguente distribuzione ($X_n\sim\mathrm{Beta}(n,1)$):

$$f_{X_n}(x) = nx^{n-1}\,; \qquad 0<x<1.$$

Si considerino le trasformazioni $Y_n = -\log X_n$. Studiare la convergenza in distribuzione delle successioni

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} kY_k}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \qquad \text{e} \qquad V_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} kY_k}{n}.$$

3. Si considerino due variabili aleatorie X e Y tali che la Y ha distribuzione Gamma di parametri $a>0$ e $b>0$ e se la variabile aleatoria Y assume valore y la variabile X ha distribuzione di Poisson di parametro y.

Mostrare che la distribuzione della variabile aleatoria X è di tipo binomiale negativo.

Si ricorda che la generica distribuzione binomiale negativa di parametri (n,p) ha la seguente forma:

$$p_r = Pr\{X=r\} = \binom{r+n-1}{r}p^n q^r\,; \qquad r=0,1,....$$

169 6.7.2000 SSDS-STAT

1. Le v.a. X e Y sono indipendenti; X è Unif$(0,1)$, Y è Espon(λ). Trovare la distribuzione della v.a. $Z = \max\{X, Y\}$.

2. X_n e Y sono v.a. indipendenti; X_n assume i valor $0, 1, \ldots, n-1$ con probabilità $1/n$ e Y i valori $0, 1$ con probabilità $1/2$. Trovare la distribuzione della v.a. $Z_n = X_n + Y$ e studiare la convergenza della successione di v.a. $T_n = Z_n/n$.

170 7.7.2000 SSA-SSE

1. Supponiamo che i coniugi A e B abbiano degli amanti all'insaputa l'uno dell'altro e che posseggano una casa di cui ognuno ha la chiave.

Si definiscano i seguenti eventi

$$\begin{aligned} A_j &= \{\text{il coniuge A usa l'appartamento il giorno } j\}, \\ B_j &= \{\text{il coniuge B usa l'appartamento il giorno } j\}, \quad j=1,2,\ldots \end{aligned}$$

e si supponga che

$$P\{A_j\} = P\{B_j\} = p, \quad j=1,2,\ldots$$

Sotto tale ipotesi e assumendo che vi sia indipendenza fra A_j e B_r, $\forall j, r$, si calcoli
(a) con quale probabilità i coniugi scoprono l'infedeltà reciproca prima del terzo giorno;
(b) con quale probabilità i coniugi scoprono l'infedeltà reciproca prima del quarto giorno;
(c) con quale probabilità, nel corso di due giorni fissati, uno dei due coniugi consuma l'infedeltà senza che l'altro lo venga a sapere.
[*Suggerimento*: si consiglia di scrivere lo spazio campionario di tutte le possibili alternative.]

2. Sia $Y_n = nX_n^2$ una successione di v.a. dove X_n è esponenziale di parametro λ_n.
(a) Trovare la distribuzione di Y_n;
(b) Trovare il limite in distribuzione, per $n \to \infty$, di Y_n quando $\lambda_n = n^\alpha$ e discutere il risultato al variare di $\alpha \geq 1/2$;
(c) Quali risultati si ottengono ai punti (a) e (b) per $Y_n = nX_n^r$, $r \in \mathbb{N}$?

3. Siano X e Y v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro 1, definite su $(1, \infty)$ e sia

$$Z = \frac{Y}{X+Y}.$$

Calcolare la funzione di ripartizione di Z.
[*Suggerimento*:
(a) si consideri che le v.a. X e Y possiedono densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>1,\ y>1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

(b) si studi la distribuzione di Z nei due intervalli $0 \leq z < 1/2$ e $1/2 \leq z \leq 1$ separatamente.]

171 15.9.2000 SSDS-STAT

1. Tre clienti si presentano ad un ufficio dove ci sono due sportelli. Ogni servizio richiede 1 o 3 minuti, con la stessa probabilità 1/2, indipendentemente per i diversi servizi. Trovare la distribuzione di probabilità del tempo necessario per completare il servizio dei tre clienti.

2. Data una successione di v.a. X_n esponenziali di parametro n per ogni n, trovare la distribuzione delle v.a.

$$Y_n = \frac{X_n}{X_n + X_{n+1}}$$

e studiarne la convergenza.

172 18.9.2000 SSA-SSE

1. Siano date tre urne e quattro palline indistinguibili; si definisca l'evento

$$A_j = \{\text{l'urna } j\text{−esima resta vuota}\}, \qquad j=1,2,3.$$

Calcolare con quale probabilità, inserendo casualmente le 4 palline nelle 3 urne,
(a) almeno un'urna resta vuota;
(b) due urne restano vuote se almeno una delle tre urne è vuota;
(c) la prima urna resta vuota se almeno una delle tre è vuota.

2. Sia (X, Y) una variabile aleatoria uniforme in $[0,1]\times[0,1]$; calcolare le seguenti probabilità:
(a) $P\left\{X-Y<\frac{1}{2}\right\}$;
(b) $P\left\{|X-Y|<\frac{1}{2}\right\}$;
(c) $P\left\{X-Y<\frac{1}{2}\,\middle|\, Y>X\right\}$;
(d) $P\left\{\max\{X,Y\} - \min\{X,Y\}<\frac{1}{2}\right\}$.

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie esponenziali di parametro $\lambda_n = n^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ e si definisca $Y_n = n^\alpha X_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si calcoli il limite in distribuzione di Y_n, per $n \to \infty$, al variare di α e β.

173 21.11.2000 SSE (esonero)

Alice e Betta fanno un gioco articolato in più mani. Ad ogni mano Alice lancia un dado e Betta ne lancia due. La singola mano viene vinta da Betta se almeno uno dei suoi due dadi supera quello di Alice, altrimenti Alice vince la mano.

(a) Calcolare la probabilità che una singola mano venga vinta da Alice.

Si indichi genericamente con p la probabilità richiesta al punto (a). La partita comincia col punteggio di 0-0; ad ogni mano il vincitore della mano guadagna un punto. Appena uno dei due giocatori ottiene due punti di vantaggio sull'avversario (2-0, 3-1, ...), egli vince il gioco.
Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

(b) in due mani consecutive fissate vincono due giocatori distinti;

(c) Alice vince il gioco in 6 mani, cioè col punteggio di 4-2;
(d) Alice vince il gioco.

I due eventi “Alice vince il gioco” e “Betta vince il gioco” sono necessari?

174 28.11.2000 SSDS-STAT (esonero)

1. Due urne U_1 e U_2 contengono, rispettivamente, 3 palline bianche e 3 nere la prima, k palline bianche e k palline nere la seconda; si lancia un dado, se esce pari si fanno n estrazioni con ripetizione da U_1, calcolare la probabilità di estrarre esattamente una pallina bianca; se il risultato del dado è dispari si estraggono 2 palline senza ripetizione da U_2, calcolare la probabilità che siano entrambe bianche. Trovare i limiti delle due probabilità ottenute, rispettivamente, per $n, k \to \infty$.

2. Alle 10 può arrivare dal medico un paziente con probabilità 1/2 oppure nessun paziente; lo stesso accade alle 10.10. La durata della visita per ogni paziente è, con probabilità 1/2, di 10 o 20 minuti. Trovare la distribuzione di probabilità del tempo per cui il medico è occupato.

175 16.1.2001 SSE (2° esonero)

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti e somiglianti, distribuite con legge esponenziale di parametro 1.
(a) Trovare funzione caratteristica e funzione di densità della variabile aleatoria

$$Z = Y - X;$$

(b) calcolare il valore atteso e la varianza di Z;
(c) studiare la convergenza della successione

$$\frac{(Z_1 + \cdots + Z_n)^2}{2n}$$

dove $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ sono variabili aleatorie indipendenti e somiglianti, tutte con la stessa distribuzione della variabile aleatoria Z definita al punto (a).

176 24.1.2001 SSDS-STAT (2° esonero)

1. Le v.a. X e Y sono indipendenti e $\mathrm{Unif}(-1, 0)$ [ovvero $\mathrm{Unif}(0, 1)$]. Trovare la distribuzione della v.a.

$$Z = \frac{X}{X - Y}.$$

2. Date le v.a. X_λ esponenziali con parametro λ, studiare, per $\lambda \to 0$ e per $\lambda \to \infty$, la convergenza delle v.a.

$$Y_\lambda = \frac{1 + X_\lambda}{X_\lambda} \qquad \left[\text{ovvero } Y_\lambda = 1 - \frac{1}{X_\lambda}\right].$$

177 25.1.2001 SSA-SSE

1. A e B giocano un set a tennis. Vince il set il giocatore che per primo si aggiudica almeno sei "giochi" con un vantaggio sull'avversario di almeno due giochi. Il set può essere vinto quindi con il punteggio finale di 6-0 o 6-1, o ... 6-4, 7-5, 8-6 e così via. Il giocatore A serve nel primo gioco, B nel secondo, A nel terzo e così via.

Il giocatore che serve vince il gioco con probabilità p.
(a) Calcolare la probabilità che il set finisca 6-1 a favore del giocatore A;
(b) Calcolare la probabilità che il set finisca 6-1 a favore del giocatore B;
(c) Sapendo che il set finisce 6-1, calcolare la probabilità che il vincitore sia A.

2. Sia $Z = \dfrac{Y}{\max\{X, Y\}}$, con X e Y variabili aleatorie indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$.
(a) Trovare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria Z.
(b) Z è assolutamente continua? Interpretare eventuali discontinuità della sua funzione di ripartizione.

3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti tali che, per ogni n, $X_n \sim \mathrm{Poisson}(1/2^n)$.

Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{V_n\}$ definita da

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

178 30.1.2001 SSDS-STAT

1. In una partita a poker con le 32 carte dal 7 all'asso, i giocatori ricevono 5 carte ciascuno. Calcolare la probabilità che:
(a) il primo giocatore abbia un poker (4 carte di valore uguale);
(b) il primo e il secondo giocatore abbiano un poker ciascuno.

2. Si considerino nel piano cartesiano il quadrato di vertici opposti (0,0) e (1,1) e la retta di equazione $y = Zx$, dove Z è una variabile esponenziale di parametro 1.

Sia A l'insieme dei punti del quadrato con $y < Zx$. Trovare la distribuzione di probabilità dell'area di A.

3. La v.a. (X_n, Y_n) sia equidistribuita nel triangolo di vertici (0,0), (0,1/n), (n,0). Trovare la distribuzione della v.a. $Z_n = X_n/Y_n$ e studiarne la convergenza.

179 8.2.2001 SSA-SSE

1. L'urna U_1 contiene una proporzione p_1 di palline bianche e l'urna U_2 una proporzione p_2. Si estraggono con reimbussolamento k_1 palline da U_1 e k_2 palline da U_2. Tutte le palline estratte vengono sistemate in una terza urna U_3.

Sia X la proporzione di palline bianche nell'urna U_3, calcolare $\mathbb{E}X$ e $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

2. Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia con distribuzione uniforme sul cerchio unitario (di centro l'origine e raggio 1).
(a) Trovare la densità marginale di X e quella di Y;
(b) stabilire se X e Y sono indipendenti;
(c) calcolare $P(X > Y, X > 0)$;
(d) stabilire se $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ e $T = \arctan \dfrac{Y}{X}$ sono indipendenti.

3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti e uniformi in $(0, 1)$. Si consideri la successione di variabili aleatorie

$$Y_n = \left(\prod_{j=1}^{n} X_j \right)^{1/n}.$$

Studiare il limite di Y_n, tenendo presente le leggi dei grandi numeri.

180 14.2.2001 SSDS-STAT

1. In una successione di lanci di una moneta uno scommettitore gioca al raddoppio su T: punta inizialmente una lira, e continua raddoppiando la posta se viene C, ricominciando con una lira se viene T. Trovare:

(a) la distribuzione di probabilità della vincita (che può essere anche negativa) dopo tre lanci;
(b) la distribuzione di probabilità della vincita dopo due lanci, se sappiamo che dopo il terzo lancio ha vinto una lira.

2. Date le v.a. X e Y indipendenti e Unif$(0, 1)$, trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = \frac{X+Y}{|X-Y|}.$$

3. Le v.a. $X_1, X_2, \ldots$ sono indipendenti e Unif$(0, 1)$. Studiare la convergenza delle successioni di v.a.

$$Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad U_n = \frac{Z_n - Y_n}{Z_n + Y_n}.$$

181 23.4.2001 SSA (esonero Γ)

1. La scatola A contiene 4 palline nere e 2 bianche. La scatola B contiene 2 palline nere e 4 bianche. Si estraggono due palline con ripetizione da una delle due scatole, scegliendo la scatola A con probabilità $p = 1/4$ e la scatola B con probabilità $q = 3/4$. Se entrambe le palline estratte sono nere, si determini:
(a) La probabilità che le palline provengano dalla scatola A.
(b) La probabilità che una terza estrazione dalla stessa scatola sia ancora pallina nera.

2. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x^2), & -1<x<1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

(a) Determinare il valore di k che rende $f(x)$ funzione di densità di una variabile aleatoria assolutamente continua X.
(b) Determinare i valori delle seguenti probabilità: $P(X$ assuma valore negativo $)$, $P(X > 1/2)$, $P(0 \le X \le 1/2)$.
(c) Determinare la funzione di ripartizione di X.

182 23.4.2001 SSA (esonero Δ)

1. Il signor Bianchi vuol comprare un mazzo di fiori per la moglie, ma non ha contanti ed ha dimenticato il numero della sua carta Bancomat. Ricorda solo che è composto da cinque cifre, di cui due sono uguali a 7, due sono uguali ad 8 ed una è uguale a 3.

(a) Calcolare la probabilità p che il signor Bianchi componga esattamente il numero della sua carta in una macchina Bancomat.

Nell'ultimo tratto di strada per tornare a casa ci sono 3 banche ed un fioraio. Se il signor Bianchi sbaglia il codice per due volte (anche in diverse macchine Bancomat) la carta gli verrà ritirata.

(b) Calcolare la probabilità che il signor Bianchi riesca a comprare i fiori alla moglie.

(c) Sapendo che la moglie ha avuto i fiori calcolare la probabilità che il sig. Bianchi abbia sbagliato il codice una volta.

(**<u>Nota:</u>** È sufficiente risolvere (b) e (c) considerando p, invece che il valore trovato in (a)

2. Si assuma che un passeggero che ha prenotato un volo Roma-Bologna si presenti all'imbarco con probabilità p, indipendentemente dagli altri passeggeri. Le due linee aeree che fanno servizio giornaliero tra Roma e Bologna sono: Roma.Airlines e Bologna.Airlines. R.A ha in dotazione aerei con 9 posti ciascuno, mentre B.A ha aerei con 18 posti ciascuno. R.A vende sempre 10 biglietti e B.A vende 20 biglietti. Determinare
(a) la distribuzione di probabilità delle due variabili aleatorie X_R ed X_B, numero di passeggeri che si presentano all'imbarco delle due compagnie in uno specifico giorno.
(b) la probabilità che, in uno specifico giorno, ciascuna delle due compagnie abbia troppi passeggeri sul proprio volo Roma-Bologna.
(c) quale delle due compagnia si trova più spesso con troppi passeggeri se $p = 1/3$.

183 23.4.2001 SSA (esonero Λ)

1. Sia noto che ogni donna in una specifica comunità ristretta ha probabilità p di essere HIV-positiva. Se una donna è HIV-positiva, i suoi figli saranno HIV-positivi con probabilità q_1. Se una donna non è infetta, i suoi figli hanno probabilità q_2 di risultare HIV-positivi a causa di altri tipi di contagio. Se i primi due figli di una donna della comunità sono entrambi HIV-negativi, qual'è la probabilità che anche la madre sia HIV-negativa? (**Nota:** Si assuma che gli eventi "uno dei figli è HIV-positivo" e "l'altro figlio è HIV-positivo" siano eventi indipendenti, condizionatamente allo stato di infezione della madre).

2. Si consideri la seguente funzione:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{10}(x^2+1), & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{10}(x+6), & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

(a) Verificare che $F(x)$ sia una funzione di ripartizione.
(b) La variabile aleatoria X con funzione di ripartizione $F(x)$, è discreta o assolutamente continua?
(c) Qual'è lo spettro di X? Qual'è il supporto di X?
(d) Determinare i valori delle seguenti probabilità: $P(X<0)$, $P(1 \le X \le 2)$, $P(X \ge 1)$.

184 1.6.2001 SSA (2°esonero)

1. (a) Siano X_1 ed X_2 variabili aleatorie indipendenti ed entrambe uniformi in $(0,1)$. Trovare la densità della variabile aleatoria $Y = X_1 X_2$
(b) Siano $\{X_n; n \in I\!N\}$ variabili aleatorie indipendenti, tutte uniformi in $(0,1)$. Sia

$$\begin{cases} Y_1 = & X_1 \\ Y_2 = & X_1 X_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ Y_n = & X_1 X_2 \ldots X_n \end{cases} .$$

Trovare la legge di probabilità di Y_n.

2. Sia data la successione $\{X_n; n \in I\!N\}$ di variabili aleatorie discrete, indipendenti che assumono valori -1 ed 1 con probabilità $\frac{1}{2}$. Per ogni n si definisca la successione di variabili aleatorie:

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n; n \in I\!N\}$
(b) Trovare la distribuzione di probabilità di Y_n per n fissato.

185 1.6.2001 SSA (2°esonero (O))

1. Sia data la variabile aleatoria con funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Trovare la distribuzione delle variabili aleatorie: $Y_1 = 2X - 1$, $Y_2 = -X$ e $Y_3 = X^2$.

2. Siano $X_0, X_1, \ldots X_n$ variabili aleatorie indipendenti, tutte con distribuzione $N(0,1)$.
(a) Utilizzando la funzione generatrice dei momenti, mostrare che, per n fissato, i momenti pari di X_n sono dati da $\mu_{2k} = (2k)!/(2^k k!)$.
(b) Utilizzando la legge forte dei grandi numeri e le proprietà della convergenza quasi certa, studiare la convergenza della successione:

$$U_n = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n X_j^4}{n}}}$$

186 6.6.2001 SSDS-STAT

1. In una partita a poker con le 32 carte dal 7 all'asso, i giocatori ricevono 5 carte ciascuno. Calcolare la probabilità che:
(a) il primo giocatore abbia un full (tre carte di valore uguale e le altre due di valore uguale);
(b) il primo giocatore abbia un full e il secondo un poker (quattro carte di valore uguale).

2. Sia (X, Y) una v.a. con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare le funzioni di densità delle v.a. X, Y e $Z = Y - X$.

3. Le v.a X_n sono indipendenti e, per ogni n, X_n è Espon(n). Studiare la convergenza della successione di v.a. $Y_n = n \min\{X_n, X_{n+1}\}$.

187 13.6.2001 SSA-SSE

1. Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono le palline l'una dopo l'altra senza reimmissione. Per $i = 1, \ldots, 10$, si indichi con A_i l'evento "la i-esima pallina estratta è quella con il numero i (si dice in questo caso che si ha un *matching* alla i-esima estrazione) e con X_i la variabile aleatoria indicatrice dell'evento A_i

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A_i \\ 0 & \text{se } \omega \notin A_i. \end{cases}$$

(a) Determinare la distribuzione di X_1 e dimostrare che coincide con la distribuzione di X_i per ogni $i \in \{1, \ldots, 10\}$.

(b) Le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono somiglianti?

(c) Le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti?

Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero totale dei matching (ad esempio, $Y = 4$ se si verificano matching in esattamente 4 estrazioni).

(d) Esprimere la variabile aleatoria Y in funzione delle variabili $X_1, \ldots, X_{10}$.

(e) Determinare il valore atteso $\mathbb{E}(Y)$.

2. Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia con distribuzione uniforme sul quadrato Q di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

(a) Trovare la distribuzione congiunta e le marginali di (X, Y);

(b) X e Y sono indipendenti?

(c) Trovare la distribuzione della variabile aleatoria $Z = Y - X$.

3. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$Z_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{se } 0 < X < \dfrac{1}{n} \\ \sqrt{X} & \text{se } \dfrac{1}{n} \le X < 1. \end{cases}$$

(a) Trovare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria Z_n;

(b) studiare la convergenza in distribuzione di Z_n;

(c) stabilire se Z_n converge anche in probabilità e/o quasi certamente.

188 4.7.2001 SSDS-STAT

1. In un parcheggio, inizialmente vuoto, ci sono n posti in fila. Arrivano due macchine, ciascuna delle quali sceglie a caso uno dei posti liberi. Trovare la distribuzione di probabilità della della distanza fra le due macchine(si misuri la distanza con 0 se le due macchine sono contigue, con 1 se sono divise da un posto vuoto e così via).

2. Sia X una v.a. avente distribuzione esponenziale di parametro λ. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y = \frac{1}{X - 1}.$$

3. Sia X una v.a. avente distribuzione esponenziale di parametro λ. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = \begin{cases} X^n, & X < 1 \\ X^{1/n}, & X \ge 1 \end{cases}$$

189 4.7.2001 SSA-SSE

1. A, B e C sono tre supermercati di una stessa catena in cui lavorano 50, 75 e 100 impiegati, di cui rispettivamente il 50%, il 60% ed il 70% sono donne. Fra tutti i 225 impiegati la direzione ne sceglie uno a caso per una vacanza-premio. Sapendo che il vincitore è donna, determinare la probabilità che lavori nel supermercato C.

2. (a) Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia con funzione di densità

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y e^{-xy}, & x>0,\ 0<y<2 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare $\mathbb{E}[e^{X/2}|Y=1]$.

(b) Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia uniformemente distribuita nel rettangolo di vertici $(0, 0), (4, 0), (0, 2), (4, 2)$. Determinare la distribuzione di $Z = Y/X$.

3. Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie tali che

$$P(X_n=0) = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad P(X_n=n^3) = \frac{1}{n^2}.$$

(a) Scrivere la funzione di ripartizione della generica variabile aleatoria X_n;

(b) tracciare il grafico della funzione di ripartizione di X_2;

(c) studiare la convergenza in distribuzione e in probabilità della successione $\{X_n\}$;

(d) stabilire se $\{X_n\}$ converge in media r-esima;

(e) studiare la convergenza quasi certa di $\{X_n\}$.

[*Suggerimento:* per risolvere il punto (e) si può usare il "Teorema di caratterizzazione della convergenza quasi certa" (V.3.4 sull'ultima edizione del testo) e ricordare che $P(\cap_{m=n}^{\infty} A_m) = 1 - P(\cup_{m=n}^{\infty} A_m^c)$]

190 17.9.2001 SSA-SSE

1. Un'urna contiene b palline bianche e n palline nere. Ogni prova consiste nell'estrarre una pallina dall'urna, osservarne il colore e rinserire la pallina nell'urna insieme ad altre c palline dello stesso colore. Si effettuano due di tali prove.

(a) Sapendo che la pallina estratta alla seconda prova è nera, determinare la probabilità che la pallina estratta alla prima prova sia stata bianca.

(b) Sia X la variabile aleatoria "numero di palline bianche nell'urna dopo due prove". Si determini la funzione di ripartizione di X.

2. Siano X_1, X_2, X_3 tre variabili aleatorie indipendenti, aventi tutte distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$. Si definiscano le due nuove variabili aleatorie

$$Y = \frac{X_2}{X_1} \qquad \text{e} \qquad Z = X_3^2$$

Trovare la distribuzione della variabile aleatoria doppia (Y, Z).

3. Sia $\{X_n\}, n=1,2,\ldots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro n. Si consideri la successione di variabili aleatorie

$$Z_n = \frac{X_n}{X_{n+1}}.$$

Stabilire se Z_n converge in distribuzione e, eventualmente, trovare la distribuzione della variabile aleatoria limite.

191 19.9.2001 SSDS-STAT

1. In una presa elettrica multipla sono inserite due spine, una con una lampadina, l'altra con due. La presa multipla e le spine funzionano ciascuna con probabilità p, indipendentemente fra loro. Trovare la distribuzione di probabilità del numero di lampadine accese.

2. La v.a. (X,Y) ha funzione di densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare le distribuzioni marginali e la distribuzione della v.a.

$$U = \frac{X}{X+Y}.$$

3. Le v.a. X_n, $n \in \mathbb{N}$, sono indipendenti; ciascuna X_n è esponenziale con parametro $1/2^n$. Studiare la convergenza della successione di v.a.

$$Y_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$