CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
6-9-2018
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

$E1:$	$+E2:$	$+E3:$	$=$	$;D1:$	$+D2:$	$+D3:$	$=$	$;VOTO=$

E1) Ad una riunione sono presenti nove persone: 3 docenti, 3 studenti e 3 impiegati. Bisogna formare una commissione di 3 persone scegliendole a caso (senza ripetizione e senza badare ai ruoli) dalle 9 presenti e poi tra quelle estratte scegliere, sempre a caso, un presidente della commissione.

i) Calcolare la distribuzione di probabilità del numero di docenti che formano la commissione ed il suo valore atteso.

ii) Calcolare la probabilità che il presidente della commissione sia un docente

iii) Calcolare la probabilità che, se il presidente della commissione è un docente, nella commissione ci sia solo un docente

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

Chiamo $N =$ "numero di docenti nella commissione" e $A =$ "il presidente è un docente"

i) La v.a. N è un ipergeometrica che assume valori in $\{0, 1, 2, 3\}$ con probabilità

$$P(N = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{9}{3}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Inoltre $\mathbb{E}N = \frac{3 \cdot 3}{9}$ **oppure** facendo il calcolo diretto

$$\mathbb{E}N = 0 \cdot \frac{20}{84} + 1 \cdot \frac{45}{84} + 2 \cdot \frac{18}{84} + 3 \cdot \frac{1}{84} = 1.$$

ii)

$$P(A) = \sum_{k=0}^{3} P(A|N = k)P(N = k) = \frac{45}{84}\frac{1}{3} + \frac{18}{45}\frac{2}{3} + \frac{1}{84} = \frac{1}{3}$$

iii)

$$P(N = 1|A) = \frac{P(N = 1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|N = 1)P(N = 1)}{1/3} = \frac{\frac{45}{84}\frac{1}{3}}{1/3} = \frac{15}{28}$$

E2) Siano X e Y v.a. indipendenti ed entrambe esponenziali di parametro $\lambda > 0$. Sia inoltre $Z = (X+Y)^2$.

i) Calcolare la distribuzione della v.a. Z (in uno o più metodi conosciuti)

ii) Calcolare $\mathbb{E}(\sqrt{Z})$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

i) $Z = (X+Y)^2 \Longrightarrow W = \sqrt{Z} = X+Y$ che si distribuisce come una $Gamma(2, \lambda)$. Infatti, per la formula di convoluzione e data l'indipendenza di X e Y,

$$f_W(w) = \int_0^w f_X(x) f_Y(w-x) dx 1_{w \geq 0} = \lambda^2 \int_0^w e^{-\lambda x} e^{-\lambda(w-x)} dx 1_{w\geq 0} = \lambda^2 w e^{-\lambda w} 1_{w \geq 0}.$$

Quindi calcolo la f.r. di $Z = W^2$, con supporto $(0, +\infty)$: per $z \geq 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(W^2 < z) = P(W < \sqrt{z}) - P(W < -\sqrt{z}) \\ &= [\text{poichè la seconda è nulla}] \\ &= \int_0^{\sqrt{z}} \lambda^2 w e^{-\lambda w} dw. \end{aligned}$$

Poichè non posso fare l'integrale (che è una Gamma incompleta), derivo per ottenere la densità

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{z}} \sqrt{z} e^{-\lambda\sqrt{z}} 1_{z \geq 0} = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda \sqrt{z}} 1_{z \geq 0}$$

[In alternativa si poteva procedere in questo modo: calcolo direttamente la distribuzione di $Z = (X+Y)^2$: per $z > 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P((X+Y)^2 < z) = P(X + Y < \sqrt{z}) \\ &= P(Y < \sqrt{z} - X) = \lambda^2 \int_0^{\sqrt{z}} e^{-\lambda x} \left(\int_0^{\sqrt{z}-x} e^{-\lambda y} dy \right) dx \\ &= \lambda \int_0^{\sqrt{z}} e^{-\lambda x} \left(1 - e^{-\lambda(\sqrt{z}-x)}\right) dx \\ &= 1 - e^{-\lambda\sqrt{z}} - \lambda \sqrt{z} e^{-\lambda \sqrt{z}}, \end{aligned}$$

da cui, derivando, si ottiene la stessa densità di prima.**]**

ii) $\mathbb{E}(\sqrt{Z}) = \mathbb{E}(X+Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$

E3) Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti dove, per ogni n, X_n è distribuita con legge esponenziale di parametro n. Studiare la convergenza in distribuzione della successione di variabili aleatorie

$$Y_n = n^2 \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

(Si ricorda che la somma dei primi k numeri naturali è data da $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$)

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione $X_n \in (0, \infty)$ q.c. dunque $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \in (0, \infty)$ q.c. e quindi $Y_n \in (0, \infty)$ q.c.

Per ogni $y > 0$,

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= \mathbb{P}(n^2 \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} < y) \\
&= \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} < y/n^2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \geq y/n^2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq y/n^2, X_2 \geq y/n^2, \dots, X_n \geq y/n^2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq y/n^2)\mathbb{P}(X_2 \geq y/n^2) \dots \mathbb{P}(X_n \geq y/n^2) \\
&= 1 - e^{-y/n^2} e^{-2y/n^2} \cdots e^{-ny/n^2} \\
&= 1 - \exp\left\{-y \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}\right\} \\
&= 1 - \exp\left\{-y \frac{n+1}{2n}\right\} \\
&\to 1 - \exp\left\{-\frac{y}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - \exp\left\{-y\frac{n+1}{2n}\right\} & y > 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - \exp\left\{-\frac{y}{2}\right\} & y > 0 \end{cases}$$

ossia Y_n converge in distribuzione ad una Esponenziale di parametro $1/2$.

E3) **ESERCIZIO ALTERNATIVO PER FREQUENTANTI ANNI PRECEDENTI**

Sia $x_1, \ldots x_n$ un campione statistico da una variabile X bernoulliana di parametro θ. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ. Sapendo di avere osservato un campione casuale di dimensione $n = 10$ tale che $\sum_{i=1}^n x_i = 8$, determinare la stima di massima verosimiglianza di θ. Spiegare inoltre le proprietà degli stimatori di massima verosimiglianza.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione La funzione di verosimiglianza è

$$L_\alpha(\mathbf{x}) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}.$$

La funzione log-verosimiglianza vale

$$\log L_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \log\theta + (n - \sum_{i=1}^n x_i)\log(1-\theta).$$

Dunque lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n x_i/n$. La stima ottenuta con il campione osservato è $\hat{\theta} = 0.8$.

D1)

1. Enunciare gli assiomi della probabilità
2. Dimostrare che $P(A^c) = 1 - P(A)$
3. Dimostrare che se $A \subseteq B$ si ha che $P(A) \leq P(B)$
4. Dimostrare che la probabilità è un numero minore o uguale ad 1

N.B. Fornire tutti i dettagli di definizioni, proprietà† e dimostrazioni

D2)

1. Dare la definizione di valore atteso di una variabile aleatoria X per X variabile aleatoria discreta e continua.

2. Dare la definizione di valore atteso di $g(X)$ per X discreta e continua e dove g è una generica funzione monotona e derivabile con derivata diversa da zero.

3. Dare la definizione di momento r-esimo di X per X discreta e continua.

4. Dare la definizione di varianza di X.

5. Dimostrare che la varianza di X è uguale al momento secondo meno il valore atteso al quadrato.

N.B. Fornire tutti i dettagli di definizioni, proprietà† e dimostrazioni

D3) Sia E_n, $n = 1, 2, \ldots$ una successione di eventi indipendenti con $\mathbb{P}(E_n) = p \in (0, 1)$ e sia A_n la variabile aleatoria 'numero di eventi E_n che si verificano nelle prime n prove'. Dimostrare che per ogni $z > 0$, quando $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}(|A_n - np| < z) \to 0.$$

(Si ricordi il risultato $\max_{0 \le r \le n} p_r(n, p) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$ dove $p_r(n, p)$ è la probabilità di avere r successi in n prove)

N.B. Fornire tutti i dettagli di definizioni, proprietà† e dimostrazioni