1

Cognome:.................... Nome:..
Matricola:.......................................
Data orale: ....☐ 5-7-2018...........☐ 16–7-2018

Probabilità e Laboratorio di Probabilità
Prof. L.Beghin
3-7-2018

Esercizio n.1 15

Il preside di una scuola ha di fronte l'elenco di 10 studenti: gli alunni dal numero 1 al 5 sono della classe A, mentre quelli dal 6 al 10 della classe B. Deve estrarre a sorte dall'elenco secondo le seguenti regole: estrae uno studente a caso e, se è della A, lo reinserisce in elenco, mentre, se è della B, lo scarta. A questo punto ne sceglie a caso un altro. Calcolare la probabilità

1. che alla seconda estrazione si ottenga un alunno della A 3
2. di aver estratto uno della B alla prima estrazione, sapendo che alla seconda estrazione si è scelto uno della A 4
3. di estrarre due volte lo stesso alunno 4

Se si indica con X la variabile aleatoria "n. dell'alunno estratto alla seconda estrazione", si calcoli $\mathbb{E}X$ 4

Esercizio n.2 15

Siano X e Y due v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro λ. Sia inoltre

$$W_n = \log\left(\frac{X}{Y}\right)^{1/n}.$$

i) Calcolare il $\mathbb{E}W_n$ 4

ii) Studiare la convergenza in distribuzione e probabilità della successione W_n, per $n \to +\infty$. 6

iii) Studiare la convergenza quasi certa della successione W_n, per $n \to +\infty$. 5

SOLUZIONI

ES. 1 A_i = "esce classe A all'i-esima estraz."
B_i = " esce classe B "

per $i = 1, 2$

1. $P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|B_1)P(B_1)$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{19}{36}$

2. $$P(B_1 | A_2) = \frac{P(A_2|B_1)\,P(B_1)}{P(A_2|B_1)\,P(B_1) + P(A_2|A_1)\,P(A_1)}$$

$$= \frac{\frac{5}{9}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{9}\cdot\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{10}{19}$$

3. $$\underbrace{P(\text{"2 v. stesso alunno"})}_{C} = P(C \cap \Omega) =$$

$$= P(C \cap A_1) + \underbrace{\cancel{P(C \cap B_1)}}_{\emptyset}$$

$$= P(C \cap A_1) = \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

4. $$P(X = i) = \begin{cases} \frac{P(A_2)}{5} = \frac{19}{180} & i = 1, 2, \dots 5 \\ ? & i = 6, 7, \dots 10 \end{cases}$$

per $i = 6, \dots 10$

$$P(X = i) = \frac{1 - P(A_2)}{5} = \frac{1 - \frac{19}{36}}{5} = \frac{17}{36 \cdot 5} = \frac{17}{180}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}X = \frac{19}{180}(1+2+3+4+5) + \frac{17}{180}(6+7+8+9+10)$$

$$= \frac{19}{180}\cdot\frac{5\cdot\cancelto{3}{6}}{\cancel{2}} + \frac{17}{180}\cdot 40 = \frac{965}{180} = 5{,}36$$

ES. 2

$$W_n = \frac{1}{n}\left[\log X - \log Y\right]$$

i) $$\mathbb{E} W_n = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(\log X) - \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(\log Y)$$

per la linearità del v. atteso

$$= 0$$

poiché sono id. distribuite $\mathbb{E}\log X = \mathbb{E}\log Y$

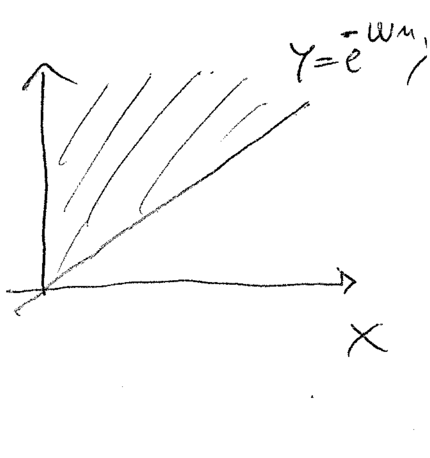
ii) $W_n \in (-\infty, +\infty)$ p.c.

$$F_{W_n}(w) = P\left(\frac{1}{n}\log\left(\frac{X}{Y}\right) < w\right)$$

$$= P\left(\log\left(\frac{X}{Y}\right) < wn\right)$$

$$= P\left(\frac{X}{Y} < e^{wn}\right)$$

$$= P\left(Y > \frac{X}{e^{wn}}\right)$$ poiché $e^{wn} > 0$



$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\left(\int_{e^{-wn}x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y}\,dy\right)dx$$

$$= \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\left[-e^{-\lambda y}\right]_{y=e^{-wn}x}^{+\infty} dx$$

$$= \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, e^{-\lambda e^{-wn}x}\,dx$$

$$= \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}+\cancel{\lambda}e^{-wn}} = \frac{1}{1+e^{-wn}} \qquad -\infty < w < +\infty$$

[Infatti per $w \to -\infty$ $F_{W_n}(w) \to 0$
per $w \to +\infty$ $F_{W_n}(w) \to 1$] verifica

$$\lim_{n\to+\infty} F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ 1 & w > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{W_n \xrightarrow[P]{d} 0}$$

poiché la convergenza in distrib. ad una v.a. degenere implica la conv. in prob.

iii) $$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} |W_m| > \varepsilon\right) = ? \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} |W_m| > \varepsilon\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disug. di} \\ \text{Boole}}}{\le} \sum_{m=n}^{\infty} P(|W_m| > \varepsilon)$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \left[P(W_m > \varepsilon) + P(W_m < -\varepsilon)\right]$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \left[P\left(\lg \frac{X}{Y} > \varepsilon m\right) + P\left(\lg \frac{X}{Y} < -\varepsilon m\right)\right]$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \left[P\left(\frac{X}{Y} > e^{\varepsilon m}\right) + P\left(\frac{X}{Y} < e^{-\varepsilon m}\right)\right]$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{1+e^{-\varepsilon m}} + \frac{1}{1+e^{\varepsilon m}} \right]$$

si vede punto ii)

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon m}}{1+e^{-\varepsilon m}} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{1+e^{\varepsilon m}}$$

$$= 2 \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{1+e^{\varepsilon m}}$$

resto n-esimo di serie convergente $\Rightarrow$ tende a zero per $n \to +\infty$

si poteva arrivare allo stesso risultato sfruttando la simmetria e l'i.d. di X e Y

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} |W_m| > \varepsilon\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad W_n \xrightarrow{q.c.} 0$$

5