Ingegneria Informatica
Appello 11 giugno 2018

Esercizio Il primo piano di un parcheggio multipiano è composto da 64 posti macchina, disposti su 8 righe (numerate da 1 a 8) e 8 colonne (contrassegnate dalle lettere da A a H). Ad una certa ora 15 macchine sono arrivate e hanno occupato altrettanti posti. Calcolare la probabilità che:

- la riga 1 o la colonna E siano completamente occupate,
- tutte le macchine arrivate sono disposte su una riga ed una colonna,
- 8 macchine siano posizionate su una riga e 2 su un'altra riga.

Soluzione

- Sia O_i l'evento "la i-esima riga occupata" e analogamente per le colonne:
$$\mathbb{P}(O_1 \cup O_E) = \mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_E) - \mathbb{P}(O_1 \cap O_E) = \frac{2\binom{56}{7} - 1}{\binom{64}{15}}$$
-
$$\mathbb{P}(1 \text{ riga e } 1 \text{ colonna}) = \frac{64}{\binom{64}{15}}$$
-
$$\mathbb{P}(1 \text{ riga e } 2 \text{ su un'altra riga}) = \frac{8 \cdot 7 \cdot \binom{8}{2}\binom{54}{5}}{\binom{64}{15}}$$
dove $8 \cdot 7$ sono i modi di scegliere le righe e $\binom{8}{2}$ i modi per scegliere le colonne per le 2 macchine.

Esercizio Sia X una v.a. con la seguente funzione di densità:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & x > 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$\lambda > 0$.

- Si calcoli la distribuzione della v.a. $Y = (\log X)^2$.
- Si calcoli il valore atteso di $\mathbb{E}(Y)$.
- Fornire un confine superiore per $\mathbb{P}(|Y - \frac{2}{\lambda^2}| > a)$, per $a > 0$.

Soluzione

- $Y = (\log X)^2 \in (0, \infty)$ q.c. $y = g(x) = (\log x)^2$ dunque $x = \log(y) = g^{-1}(y) = e^{\sqrt{y}}$ dunque
$$\frac{d}{dy}h(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}}$$
e
$$f_Y(y) = f_X(e^{\sqrt{y}})\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}}1_{\{y>0\}}.$$
Oppure
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$$
e
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}((\log X)^2 < y) = \lambda \int_1^{e^{\sqrt{y}}} x^{-\lambda-1}dx = -x^{-\lambda}\Big|_1^{e^{\sqrt{y}}} = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}}$$
dunque
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}} & y > 0 \end{cases}$$

- $$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty y \frac{d}{dy} F_Y(y) dy = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \sqrt{y} e^{-\lambda\sqrt{y}} dy$$
  con il cambiamento di variabile $w = \lambda\sqrt{y}$ si ottiene
  $$\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{2} \frac{2}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{w^2}{\lambda} e^{-w} dw = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}.$$
- $$\mathbb{P}(|Y - \frac{2}{\lambda^2}| > a) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{a^2} = \frac{\frac{24}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^4}}{a^2} = \frac{20}{a^2\lambda^4},$$
  infatti
  $$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}} dy = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty y^{3/2} e^{-\lambda y} = \frac{\lambda}{2} \frac{2}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{w^4}{\lambda^3} e^{-w} dw = \frac{\Gamma(5)}{\lambda^4} = \frac{24}{\lambda^4}$$
  dove si è usato il cambio di variabile $w = \lambda\sqrt{y}$.

Esercizio Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con distribuzione esponenziale di parametro 1. Siano

$$Y_n = \max\{X_1, \cdots X_n\}, \qquad Z_n = Y_n - \log n.$$

Determinare:

(1) il supporto di Z_n,
(2) la funzione di ripartizione di Z_n giustificando tutti i passaggi,
(3) studiare la convergenza in distribuzione di Z_n.

Soluzione Si ha che $F_n(x) = 0$ per ogni $x < -\log n$. Per ogni $x \geq -\log n$ si ha

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leq x + \log n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x + \log n\}\right) \\ &= [\mathbb{P}(X_k \leq x + \log n)]^n \\ &= [1 - \exp\{-x - \log n\}]^n \\ &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Dunque la successione F_n converge in ogni punto di $\mathbb{R}$ verso la funzione F continua e crescente definita da:

$$F(x) = \exp\{e^{-x}\}.$$

Poichè

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1,$$

F è la funzione di ripartizione di una legge su $\mathbb{R}$.

Esercizio Si consideri un campione $X_1, \ldots X_n$ di una legge di densità

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\theta^2} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

dove il parametro θ varia in $\Theta = \mathbb{R}^+$. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

Soluzione Per una osservazione $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la funzione di verosimiglianza è

$$L_\theta(x) = \left(\frac{4}{\theta^3}\right)^n \pi^{-n/2} x_1^2 \dots x_n^2 e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/\theta^2},$$

se $x_1, \dots, x_n > 0$ e $L_\theta(x) = 0$ altrimenti. Dunque

$$\log L_\theta(x) = -3n \log\theta - \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{\theta^2} + f(x_1, \dots, x_n).$$

dove $f(x_1, \dots, x_n)$ non dipende da θ. Quindi

$$\frac{d}{d\theta} \log L_\theta(x) = -3\frac{n}{\theta} + \frac{2}{\theta^3}(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Il valore in cui si annulla la derivata di $\theta \to \log L_\theta(x)$ è

$$\sqrt{\frac{2}{3n}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$$

quindi lo stimatore di massima verosimiglianza è

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{3n}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

Domande di teoria

(1) Dare la definizione di uguaglianza, uguaglianza quasi certa, uguaglianza in distribuzione ed indipendenza per due variabili aleatorie X e Y.

(2) Dimostrare che l'uguaglianza di due variabili aleatorie implica l'uguaglianza in distribuzione e che non vale il viceversa, ossia che l'uguaglianza in distribuzione non implica l'uguaglianza.

(3) Data la variabile aleatoria doppia (X, Y) dare la definizione di distribuzione di probabilità di Y condizionata ad $X = x$, nel caso discreto e continuo. Cosa succede se le due variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

Dimostrare la proprietà di continuit della probabilità per successioni monotone di eventi successioni non-monotone (ma convergenti) di eventi N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

Enunciare la disuguaglianza di Cebicev. Dare la definizione di convergenza in probabilità e di convergenza in media r-esima. Dimostrare la relazione tra convergenza in probabilità e convergenza in media r-esima. N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni