1

Cognome:......................................**Nome:**......................................
Matricola:..
Data orale:...☐ 18-1-2018 .☐ 16-2-2018

II ESONERO
PROBABILITA' E LABORATORIO
Prof. L. Beghin

10-1-2018

Esercizio n.1 15

Siano X e Y v.a. con la seguente densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y-\frac{x}{y}}, & x, y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

i) calcolare la densità marginale della v.a. Y e determinare se le variabili sono indipendenti 6
ii) calcolare la distribuzione condizionata della v.a. X data la Y 4
iii) calcolare la $P(X < Y)$ 5

Esercizio n.2 15

Sia X_n una successione di v.a. indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro λ_n, per $n = 1, 2, ...$ Studiare la convergenza (nelle varie forme, laddove possibile)

i) della successione 7

$$\frac{X_n}{n}$$

nei tre casi $\lambda_n = 1/n$, $\lambda_n = n$ e $\lambda_n = \lambda$, per ogni n.

ii) della successione 8

$$\frac{\min(X_1, ..., X_n)}{n}$$

per $\lambda_n = n$ e $\lambda_n = \lambda$, per ogni n.

SOLUZIONI

ES. 1

i) $\boxed{f_Y(y)} = \int_0^{+\infty} e^{-y-\frac{x}{y}} dx \, 1_{y>0} = e^{-y} \left[-y e^{-\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{+\infty} 1_{y>0}$

$= \boxed{y e^{-y} 1_{y>0}}$

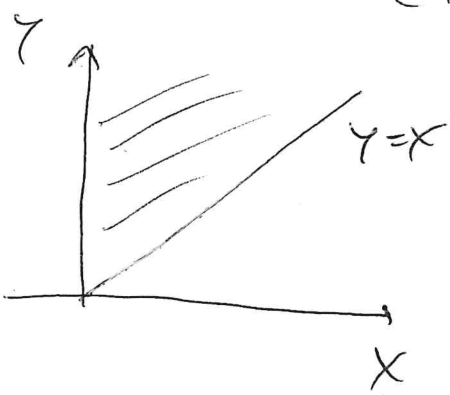
Le v.a. non sono indipendenti in quanto

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot y e^{-y} 1_{y>0}$$

ii) $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{e^{-y-\frac{x}{y}} 1_{x,y>0}}{y e^{-y} 1_{y>0}} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y} 1_{x>0}$$

Quindi $\boxed{X|Y \sim Exp\left(\frac{1}{y}\right)}$

iii) $$\boxed{P(X<Y)} = \iint_{(x,y):y>x} e^{-y-\frac{y}{x}} 1_{x>0,y>0} \, dx \, dy$$



$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y} e^{-y-\frac{x}{y}} dx \right) dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} \left[-y e^{-\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{y} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy - \frac{1}{e} \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy$$

$$= \boxed{\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

$\int_0^{+\infty} y e^{-y} = 1$ poiché è il EZ per $Z \sim Exp(1)$

ES. 2 $\quad X_n \sim Exp(\lambda_n)$

i) $Z_n = \frac{X_n}{n} \in (0, +\infty)$

per $z>0$

$$F_{Z_n}(z) = P\left(\frac{X_n}{n} < z\right) = P(X_n < zn) = 1 - e^{-\lambda_n z n}$$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda_n z n} & z > 0 \end{cases}$$

per $\lambda_n = \frac{1}{n}$ $\quad \boxed{Z_n \stackrel{d}{=} Z \sim Exp(1)}$

per $\lambda_n = n$ $\quad F_{Z_n}(z) \longrightarrow F(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow[P]{d} 0}$$

per $\lambda_n = \lambda$ $\quad P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{X(\omega)}{n} = 0\right) = 1$

$\boxed{Z_n = \frac{X}{n} \xrightarrow{P.C.} 0}$ $\quad$ perché $X_n \stackrel{q.c.}{=} X \sim Exp(\lambda)$ (non dipende più da n)

FACOLTATIVO

$$\mathbb{E}\left(|Z_n - Z|^r\right)$$

per $\lambda_n = \frac{1}{n}$ non conosciamo la distribuz. congiunta di (Z_n, Z)

ma per $\lambda_n = n$ e $\lambda_n = \lambda$

$$\mathbb{E}|Z_n - 0|^r = \mathbb{E}|Z_n|^r$$
$$= \frac{1}{n^r}\mathbb{E}|X_n|^r = \frac{\lambda_n}{n^r}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_n x}|x|^r\,dx = \frac{1}{n^{r+1}}$$

per $\lambda_n = n$ $\quad \mathbb{E}|Z_n - 0|^r \Rightarrow \frac{1}{n^{2r}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ (4)

per $\lambda_n = \lambda$ $\quad \mathbb{E}|Z_n - 0|^r = \frac{1}{\lambda^r n^r} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$\Rightarrow$ in entrambi i casi $\boxed{Z_n \xrightarrow{i.m.r.} 0}$

---

ii) $Z_n = \frac{\min(X_1, \dots X_n)}{n} \in (0, +\infty)$ p.c.

$F_{Z_n}(z) = P(\min(X_1, \dots X_n) < zn)$

per $z \geq 0$

$= 1 - P(\min(X_1, \dots X_n) > zn)$

$= 1 - \prod_{j=1}^{n} P(X_j > zn)$

$= 1 - \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j zn}$

$= 1 - e^{-\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) z \cdot n}$

per $\lambda_n = n$

$= 1 - e^{-\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) zn} =$

$= 1 - e^{-\frac{n^2(n+1)}{2} z} \to 1$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow[p]{d} 0}$

per $\lambda_n = \lambda$ $\quad = 1 - e^{-n^2 z \lambda} \to 1$ per $n \to +\infty$ $\quad \boxed{Z_n \xrightarrow[p]{d} 0}$

5

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\left(\frac{\min(X_1,\dots X_m)}{m}>\varepsilon\right)\right) =$$ per la disug. di Boole

$$\leq \sum_{m=n}^{\infty} P\left(\frac{\min(X_1,\dots X_m)}{m}>\varepsilon\right)$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} P(X_j>\varepsilon m) =$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} e^{-\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\right)\varepsilon m}$$

per $\lambda_n = n$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} e^{-\varepsilon m \sum_{j=1}^{m} j}$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} e^{-\varepsilon m \frac{m(m+1)}{2}}$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{e}}_{<1}\Big)^{\varepsilon m \frac{m(m+1)}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

perché è il resto n-esimo di una serie convergente

per $\lambda_n = \lambda$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} e^{-\varepsilon m^2 \lambda} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{analogamente}$$

$\Rightarrow$ in entrambi i casi

$$\boxed{\frac{\min(X_1,\dots X_n)}{n} \xrightarrow{q.c.} 0}$$