(1)

Cognome:................................ Nome:....................................

Probabilità e Laboratorio - Prof. L.Beghin

-

19-4-2017

Esercizio 1

Ogni giorno compriamo una figurina tra m tipi diversi. Supponiamo che ogni volta che si compra una figurina, questa sia di tipo i con probabilità p_i, $i = 1, ..., m$. Supponiamo inoltre di aver appena comprato la figurina n-esima.

i) Sapendo che l'n-esimo giorno compro una figurina di tipo i, qual'è la probabilità che non sia un doppione.

ii) Qual'è la probabilità che la figurina comprata l'n-esimo giorno sia un doppione.

Esercizio 2

Sia $\{U_n, n \in N\}$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 1]$. Per ogni n definiamo $Y_n = max\{U_1, ..., U_n\}$.

i) Determinare una costante c tale che $Y_n \xrightarrow{P} c$.

ii) Dimostrare che tale convergenza vale anche quasi certamente.

iii) Determinare la distribuzione asintotica di $Z_n = n(1 - Y_n)$ per $n \to +\infty$..

SOLUZIONI

1) N_n = "figurina nuova all'n-esimo acquisto"

i) $P(N_n \mid \text{Tipo } i) = (1-p_i)^{n-1} p_i \qquad i = 1, \dots m$

ii) $P(N_n) = \sum_{i=1}^{m} P(N_n \mid \text{Tipo } i) P(\text{Tipo } i) =$

$= \sum_{i=1}^{m} (1-p_i)^{n-1} p_i^2$

$P(\text{Doppione all'n-esimo}) = 1 - P(N_n)$

$= 1 - \sum_{i=1}^{m} (1-p_i)^{n-1} p_i^2$

ii) $Y_n = \max(U_1, \dots U_n) \in (0,1)$ p.c. ②

i) $F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = P(U_1 < y, \dots U_n < y)$

$$= \left(F_{U_i}(y)\right)^n = y^n$$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y^n & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Y_n \xrightarrow{P} Y \overset{p.c.}{=} 1$$

ii) $Y_n \xrightarrow{p.c.} 1$ poichè vale la CNS per la conv. p.c.:

$$P\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} |\underbrace{Y_m - 1}_{\text{è sempre} \le 0}| > \varepsilon\Big) \le \sum_{m=n}^{\infty} P(-Y_m + 1 > \varepsilon)$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} P(Y_m < 1 - \varepsilon)$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} (1-\varepsilon)^m \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

poichè è il resto n-esimo di una serie geometrica convergente $\forall \varepsilon > 0$.

iii) $Z_n = n(1-Y_n) \in (0,n)$ q.c.

$$F_{Z_n}(z) = P\left(n(1-Y_n)<z\right) = P\left(1-Y_n < \frac{z}{n}\right)$$

~~per $z \in (0,1)$~~

$$= P\left(Y_n > 1-\frac{z}{n}\right) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-\left(1-\frac{z}{n}\right)^n & 0<z\le n \\ 1 & z>n \end{cases}$$

per $n \to +\infty$ $\quad F_{Z_n}(z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-e^{-z} & z>0 \end{cases}$

Quindi $\quad Z_n \xrightarrow{d} Z \sim Exp(1)$