CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
17/07/2018
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

$E1:$	$+E2:$	$+E3:$	$=$	$;D1:$	$+D2:$	$+D3:$	$=$	$;VOTO=$

E1) Per vincere una scommessa devo ottenere, nei lanci successivi di una moneta (non necessariamente bilanciata), due facce diverse. Quindi lancio ripetutamente una moneta finchè ottengo per la prima volta una faccia diversa dalla precedente. Indichiamo con p la probabilità di testa.

1. Qual'è la probabilità che debba fare 6 lanci?
2. Sapendo che devo fare più di due lanci, calcolare la probabilità che ne debba fare 3.
3. Calcolare il numero medio di lanci necessari, in generale e nel caso in cui la moneta sia bilanciata.
   [Suggerimento: si ricordi la formula seguente: $\sum_{j=0}^{\infty} j a^j = a/(1-a)^2$, per $|a|<1$]

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione: Sia N la variabile aleatoria 'numero di lanci necessari'

1. $$\mathbb{P}(N=6) = p^5\, q + p\, q^5.$$
2. $$\mathbb{P}(N=3|N>2) = \frac{\mathbb{P}(N>2, N=3)}{\mathbb{P}(N>2)} = \frac{\mathbb{P}(N=3)}{\mathbb{P}(N>2)} = \frac{p^2q+pq^2}{1-\mathbb{P}(N=2)} = \frac{p^2q+pq^2}{1-2pq}$$
3. $$\mathbb{P}(N=n) = p^{n-1}\, q + p\, q^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$
   e quindi
   $$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n\, \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} n\, (p^{n-1}\, q + p\, q^{n-1})$$
   con il cambiamento di variabile $n = \ell + 2$ si ottiene
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(N) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)\, (p^{\ell+1}\, q + p\, q^{\ell+1}) \\ &= p\, q\, \Big[\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell p^\ell + \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell q^\ell + 2\sum_{\ell=0}^{\infty} p^\ell + 2\sum_{\ell=0}^{\infty} q^\ell\Big] \\ &= p\, q\, \Big[\frac{p}{(1-p)^2} + \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{2}{1-p} + \frac{2}{1-q}\Big] \\ &= \frac{p^2}{q} + \frac{q^2}{p} + 2p + 2q.\end{aligned}$$
   Per $p = 1/2$ si ha $\mathbb{E}(N) = 3$.

E2) Sia X una v.a. con la seguente funzione di densità (per $a, k \in \mathbb{R}^+$)

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x-1)^{a-1}, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Si determini la costante k e la funzione di ripartizione della X.
2. Si calcoli $\mathbb{E}(X-1)$
3. Ponendo $a = 2$, si calcoli la distribuzione di

$$Y = \frac{1}{(1-X)^2}.$$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione:

1. Poichè

$$k \int_1^2 (x-1)^{a-1} dx = k \int_0^1 y^{a-1} dy = \frac{k}{a}$$

si ottiene la condizione $k = a$.

Per determinare la funzione di ripartizione di X osserviamo che per $x \in (1, 2]$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = a \int_1^x (u-1)^{a-1} du = (x-1)^a,$$

e dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ (x-1)^a & 1 < x \leq 2, \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

2.

$$\mathbb{E}(X-1) = a \int_1^2 (x-1)(x-1)^{a-1} dx = \frac{a}{a+1}.$$

3. $Y \in (1, \infty)$ q.c. Per $y > 1$ si ha

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{(1-X)^2} < y\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big((1-X)^2 > \frac{1}{y}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(1 - X > \frac{1}{\sqrt{y}}\Big) + \mathbb{P}\Big(1 - X < -\frac{1}{\sqrt{y}}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(X < 1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\Big) + \mathbb{P}\Big(X > 1 + \frac{1}{\sqrt{y}}\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + 1 - F_X\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{y}}\Big) \\
&= 1 - \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{y}} - 1\Big)^a \\
&= 1 - \frac{1}{y^{a/2}}.
\end{aligned}
$$

Dunque per $a = 2$

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{y} & y > 1. \end{cases}
$$

E3) Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie dove per ogni n

$$X_n = Z_1 + \cdots + Z_n$$

e le variabili Z_i sono indipendenti e distribuite come una Gamma di parametri $\lambda = 1/2$ e $\nu = 1/2$. Studiare il limite in distribuzione e in probabilità della successione di variabili aleatorie

$$W_n = \frac{1}{n} X_n$$

1. applicando la disuguaglianza di Cebicev,
2. applicando la legge dei grandi numeri, dopo aver verificato le ipotesi.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione: I parte. Poichè $\mathbb{E}[X_n] = n$ e $\mathrm{Var}(X_n) = 2n$,

$$\mathbb{E}[W_n] = \frac{1}{n} n = 1, \qquad \mathrm{Var}(W_n) = \frac{1}{n^2} 2n = \frac{2}{n} \to 0.$$

Per la disuguaglianza di Cebicev dunque per ogni $\eta > 0$,

$$\mathbb{P}\{|W_n - 1| > \eta\} \leq \frac{\mathrm{Var}(W_n)}{\eta^2} \to 0$$

ossia $\{W_n\}$ converge in probabilità e quindi in distribuzione alla costante 1.

II parte. Possiamo applicare la legge dei grandi numeri e dire che

$$\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n)$$

converge in probabilità alla media $\mathbb{E}[Z_1] = 1$. Ossia

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n} X_n - 1\right| > \delta\right\} = \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) - 1\right| > \delta\right\} \to 0$$

ossia si ha la convergenza in probabilità e in distribuzione di $W_n = \frac{1}{n} X_n$ alla costante 1.

E3) Si consideri un campione $X_1, \dots X_n$ di una legge di densità

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

dove il parametro θ varia in $\Theta = \mathbb{R}^+$. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

Soluzione: Per un'osservazione $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n > 0$, la funzione di verosimiglianza è

$$L_\theta(x) = (2\theta)^n x_1 \cdots x_n e^{-\theta(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

Dunque

$$\log L_\theta(x) = n \log \theta - \theta(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + f(x_1, \dots, x_n).$$

Dunque

$$\frac{d}{d\theta} \log L_\theta(x) = \frac{n}{\theta} - (x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Quindi

$$\hat{\theta} = \frac{n}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

è il punto di massimo della funzione $\theta \to \log L_\theta(x)$.

D1)

1. Legge delle probabilità totali per 3 eventi qualunque (con dim.)
2. Diseguaglianza di Boole (con dim.)

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D2)

1. Probabilità condizionata.di eventi
2. Legge delle probabilità composte
3. Teorema Bayes (con dim.)

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D3)

1. Dare la definizione di uguaglianza, uguaglianza quasi certa, uguaglianza in distribuzione ed indipendenza per due variabili aleatorie X e Y.
2. Dimostrare che l'uguaglianza di due variabili aleatorie implica l'uguaglianza in distribuzione e dimostrare che non vale il viceversa.
3. Data la variabile aleatoria doppia (X, Y) dare la definizione di distribuzione di probabilità di Y condizionata ad $X = x$, nel caso discreto e continuo. Cosa succede se le due variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.