①

Cognome:.. Nome:..
N. matricola:.......................................

Probabilità
Prof. L.Beghin
14-2-2018

Esercizio n.1

Una scatola contiene 6 palline numerate da 1 a 6. Il numero riportato su ciascuna pallina rappresenta la quantità di monete da un euro vinte in caso di estrazione. Marco estrae una biglia dalla scatola e, dopo averne letto il numero, la reinserisce nella scatola. A questo punto Paolo effettua l'estrazione di una pallina e legge il valore riportato sulla stessa.

i) Indicando con X_1 e X_2 la quantità di denaro vinto rispettivamente da Marco e Paolo, determinare la distribuzione di probabilità della quantità aleatoria Y che indica lo scarto, in valore assoluto, tra le vincite dei due giocatori.

ii) Calcolare la funzione di ripartizione di Y. Calcolare, inoltre, la probabilità che Y assuma un valore al massimo pari a 2.

Esercizio n.2

Sia (X, Y) una v.a. doppia con la seguente funzione di densità congiunta, per $K > 0$,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Ky^2, & -1 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ y > |x| \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Si determini

i) la costante K

ii) le funzioni di denità marginali delle due v.a. X e Y. Stabilire se esse sono tra loro indipendenti

iii) il valore atteso $\mathbb{E}[X|Y = y]$

Esercizio n.3

Siano X_i e Y_i v.a. indipendenti ed identicamente distribuite, per ogni $i \geq 1$. Sia inoltre X_i uniforme discreta sull'insieme di valori $\{1, e, e^2\}$, mentre Y_i ha la seguente distribuzione di probabilità $P(Y_i = e^{-2}) = 1/2$, $P(Y_i = 1) = P(Y_i = e^2) = 1/4$. Studiare la convergenza delle seguenti successioni, per $n \to \infty$:

$$\text{i)} \quad Z_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i}\right)^{1/n}$$

$$\text{ii)} \quad W_n = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{e^n}\right)^{a/\sqrt{n}}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONI

EJ. 1 i) $Y = |X_1 - X_2|$ $\qquad X_i \sim \text{Unif}\{1, 2, \dots 6\}$ $\quad i = 1, 2$

$P(Y = j) = P(|X_1 - X_2| = j)$

$= P(|X_1 - X_2| = j,\ X_1 = X_2) + P(|X_1 - X_2| = j,$

$X_1 \neq X_2)$

per $j=0$ $\quad P(Y=0) = P(Y=0, \bigcup_{j=1}^{6} X_1=j)$

$$= \sum_{j=1}^{6} P(X_1=j, X_2=j)$$

$$= \frac{1}{36}\sum_{j=1}^{6} 1 = \frac{1}{6}$$

per $j>0$ ovvero $\underline{j=1,2,3,4,5}$

$$P(Y=j) = P(|X_1-X_2|=j, X_1<X_2) + P(|X_1-X_2|=j, X_1>X_2)$$

$$= P(X_2-X_1=j, X_1<X_2) + P(X_1-X_2=j, X_1>X_2)$$

per la simmetria $\quad = 2\,P(X_2=X_1+j, X_1<X_2)$

$$= 2\sum_{k=1}^{6-j} P(X_1=k, X_2=j+k)$$

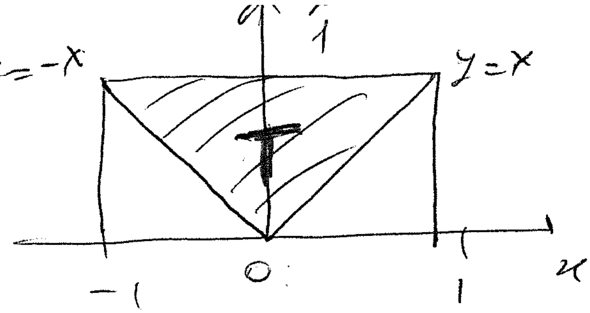
$$= \frac{2}{36}\sum_{k=1}^{6-j} 1 = \frac{1}{18}(6-j)$$

Infatti $\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{5}\frac{(6-j)}{18} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3} - \frac{30}{36} + \frac{1}{6} = \frac{36}{36} = 1$

(ii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{1}{6} & 0\le y<1 \\ \frac{1}{6}+\sum_{j=1}^{k}\frac{6-j}{18} & k\le y<k+1,\ k=1,2,\dots,5 \\ 1 & y\ge 5 \end{cases}$$

$$P(Y\le 2) = \frac{1}{6} + \sum_{j=1}^{3}\frac{6-j}{18} = \frac{1}{6} + \frac{18-6}{18} = \frac{2}{3}$$

Es. 2



i) $k \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$1 = k \iint_T y^2\,dx\,dy = k\int_0^1 y^2 \left(\int_{-y}^{y} dx\right) dy$$

$$= 2k \int_0^1 y^3\,dy = \frac{k}{2}\, y^4\Big]_0^1 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$$

ii) $\boxed{f_X(x)} = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

$$= \int_{-x}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dy\; \mathbb{1}_{-1<x<0} + \int_{x}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dy\; \mathbb{1}_{0<x<1}$$

$$= \frac{2}{3}\left[y^3\right]_{-x}^{1} \mathbb{1}_{-1<x<0} + \frac{2}{3}\left[y^3\right]_{x}^{1} \mathbb{1}_{0<x<1}$$

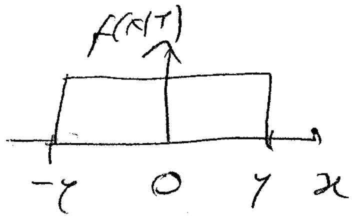
$$= \boxed{\begin{cases} \frac{2}{3}(1+x^3) & -1<x<0 \\ \frac{2}{3}(1-x^3) & 0<x<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

$$\boxed{f_Y(y)} = \boxed{\begin{cases} 2\int_{-y}^{y} y^2\,dx = 4y^3 & \text{per } 0<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

X e Y non sono indipendenti perché $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$

iii) $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\cancel{2y^2}\, 1_{0<x<1}\, \cancel{1_{0<y<1}}\, 1_{|x|\le y}}{\cancel{4y^3}\, \cancel{1_{0<y<1}}}$$

$$= \frac{1}{2y}\, 1_{-y<x<y} = \begin{cases} \frac{1}{2y} & -y<x<y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$\Rightarrow (X|Y=y) \sim \mathrm{Unif}(-y,y)$

$\Rightarrow \boxed{E(X|Y=y)=0}$

Ej. 3

i) $$\log Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{X_i}{Y_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\log(X_i) - \log(Y_i)\right]$$

Le X_i, Y_i sono i.i.d. Calcolo il valore atteso di

$$E[\log(X_i) - \log(Y_i)] = E(\log(X_i)) - E(\log(Y_i))$$
$$= 1 - \left[-1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right] = \frac{3}{2}$$

poiché $\log X_i \sim \mathrm{Unif}\{0,1,2\}$

$\log Y_i \in \{-2,1,2\}$ con $P(\log Y_i = -2) = \frac{1}{2}$

e $P(\log Y_i = 1) = P(\log Y_i = 2) = \frac{1}{4}$

Anche la variabile è ovviamente finita, quindi per la LFGN, $\log Z_n \xrightarrow{q.c.} \frac{3}{2}$

e per il teorema sulle convergenze di funzioni continue

$\boxed{Z_n \xrightarrow{q.c.} e^{3/2}}$

ii) $a=0 \Rightarrow W_n \overset{P.C.}{=} 1$

$$a \neq 0 \Rightarrow \log W_n = \frac{a}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \log(X_i) - \log(e^n)\right]$$

$$= \frac{a}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \log(X_i) - n\right]$$

$$= \frac{a}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left[\log(X_i) - 1\right]$$

Date le ipotesi applico il TLC, considerando che

$$\mathbb{E}[\log(X_i)] = 1 \quad \text{e}$$

$$V[\log(X_i)] = \mathbb{E}[\log(X_i)^2] - 1$$

$$= \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

Quindi

$$\log W_n = \boxed{\frac{a}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} [\log(X_i) - 1] \xrightarrow{d} Z \sim a\, N\left(0, \frac{2}{3}\right) \quad \text{ovvero } Z \sim N\left(0, \frac{2a^2}{3}\right)}$$

per il teorema alla convergenza di una funzione continua

$$\boxed{W_n \xrightarrow{d} W = e^{Z}}$$ con la seguente distribuz.

per $w>0$

$$F_W(w) = P(e^Z < w) = P(Z < \log w)$$

$$= \int_{-\infty}^{\log w} \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2/3}}}{\sqrt{4\pi a^2/3}}\, dx$$

$$\Rightarrow f_W(w) = \frac{d F_W(w)}{w} = \frac{\sqrt{3}\, e^{-\frac{3(\log w)^2}{4a^2}}}{2a\sqrt{\pi}\, w} \quad \text{per } w>0$$