1

Cognome:.......................................**Nome:**.......................................
Matricola:..

Data orale:...☐ **18-1-2018** ☐ **16-2-2018**
☐ **Recupero I esonero** ☐ **Recupero II esonero**
☐ **Scritto completo**

PROBABILITA' E LABORATORIO
Prof. L. Beghin

12-1-2018

Esercizio n.1
Ad una festa sono presenti un numero m di maschi e f di femmine. Si sceglie a caso un partecipante alla festa e gli si chiede di invitare un numero x di amici del suo stesso sesso. All'interno del gruppo di invitati così modificato si ripete l'estrazione e così via. Si definisca M_n l'evento "l'invitato estratto l'n-esima volta è maschio". Calcolare:
i) $P(M_2)$
ii) $P(M_1 | M_2)$
iii) $P(M_n)$
commentando i risultati.

Esercizio n.2
Sia (X, Y) una v.a. doppia con funzione di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(y-x), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

i) Determinare il valore di k
ii) Ricavare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = \frac{X+Y}{2}$$

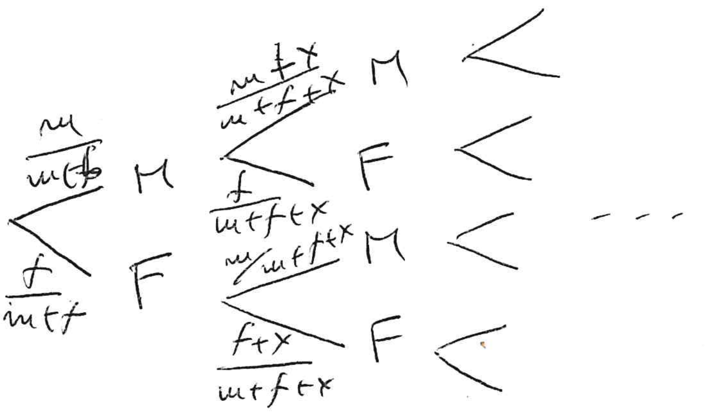
Esercizio n.3
Siano X e Y v.a. indipendenti ed entrambe uniformi in $(0,1)$. Sia

$$Z_n = \frac{nX}{nX+Y}$$

i) Calcolare la funzione di ripartizione della successione $\{Z_n\}_{n\geq 1}$
ii) Studiarne la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa.

SOLUZIONI

ES. 1



i) $\boxed{P(M_2)} = P(M_2 \cap (M_1 \cup F_1))$

$= P(M_2|M_1)P(M_1) + P(M_2|F_1)P(F_1)$

$= \dfrac{m+x}{m+f+x} \cdot \dfrac{m}{m+f} + \dfrac{m}{m+f+x} \cdot \dfrac{f}{m+f} =$

$= \dfrac{m\,(\cancel{m+x+f})}{(m+f)(\cancel{m+f+x})} = \boxed{\dfrac{m}{m+f}}$

la prob. di estrarre maschio al II° turno è uguale a quella del I° turno (ovvero alla proporzione iniziale di maschi)

ii) $\boxed{P(M_1|M_2)} = \dfrac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_2)} = \dfrac{P(M_2|M_1)\,P(M_1)}{P(M_2)}$

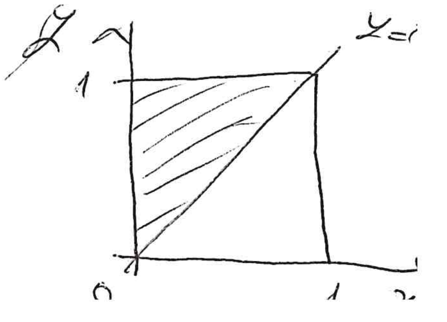
$= \dfrac{\dfrac{m+x}{m+f+x} \cdot \cancel{\dfrac{m}{m+f}}}{\cancel{\dfrac{m}{m+f}}} = \boxed{\dfrac{m+x}{m+f+x}}$

poiché $P(M_1) = P(M_2)$

iii) $P(M_3) = P(M_2) = P(M_1) = \dfrac{m}{m+f}$

la prob di estrarre maschio è costante ad ogni turno ed uguale alla proporzione iniziale di maschi.

$\Longrightarrow \boxed{P(M_n) = \dfrac{m}{m+f} \quad \forall n}$



Es. 2

i) $1 = k \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^z (z-x)\,dx \right) dz$

$$= k\int_0^1 \left[-\frac{(y-x)^2}{2}\right]_0^y dy =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^1 y^2\, dy = \frac{k}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^1 = \frac{k}{6} \Longrightarrow \boxed{k=6}$$

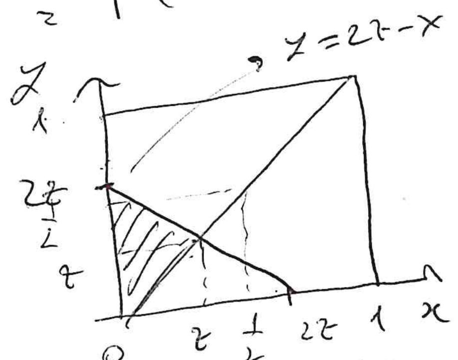
ii)

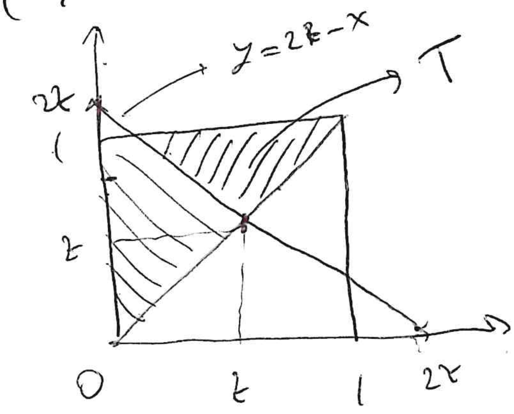
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6(y-x) & 0<x\leq y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$Z = \frac{X+Y}{2} \in (0,1) \quad \text{q.c.}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z\leq 0 \\ ? & 0<z\leq 1 \\ 1 & z>1 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P\left(\frac{X+Y}{2} < z\right) = P(X+Y<2z) = P(Y<2z-X)$$





$$2z \in (0,1)$$

$$z \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$$

per $z\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$$= 6\int_0^z \left(\int_x^{2z-x} (y-x)\,dy\right) dx$$

$$= \frac{6}{2}\int_0^z \left[(y-x)^2\right]_x^{2z-x} dx$$

$$= 3\int_0^{z} 4\,(z-x)^2\,dx = \cancel{\tfrac{4}{0}}$$

$$= -4\left[(z-x)^3\right]_0^z = 4z^3$$

per $z\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

$$= 1 - \iint_{(x,y)\in T} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= 1 - 6\int_z^1 \left(\int_{2z-y}^{y} (y-x)\,dx\right) dy$$

$$= 1 + \frac{6}{2}\int_z^1 \left[(y-x)^2\right]_{2z-y}^{y} dy$$

$$= 1 - 3\int_z^1 4\,(y-z)^2\,dy$$

$$= 1 - 4\left[(y-z)^3\right]_z^1 = 1 - 4(1-z)^3$$

$$\boxed{F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 4z^3 & 0 < z \le \frac{1}{2} \\ 1-4(1-z)^3 & \frac{1}{2} < z < 1 \\ 1 & z \ge 1 \end{cases}}$$

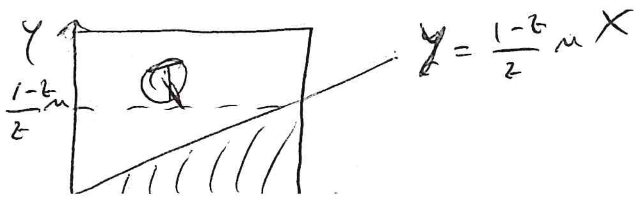
Es. 3

$Z_n \in (0,1)$ p.c. $\forall n$

$$F_{Z_n}(z) = P\left(\frac{nX}{nX+Y} < z\right)$$

$$= P\left(Y > \frac{1-z}{z}\,nX\right) \quad \text{poiché } z>0$$

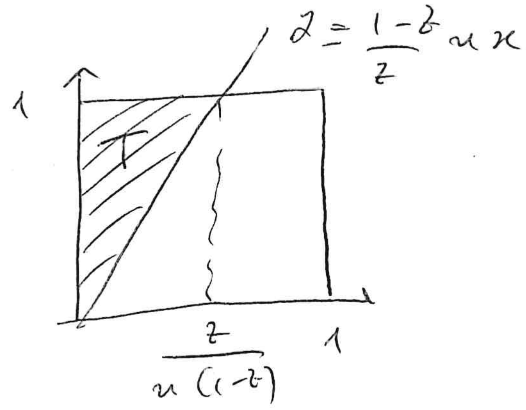
per $\frac{1-z}{z}\,n < 1$



ovvero per $\frac{n}{n+1} < z < 1$

per $\frac{1-z}{z} n > 1$

ovvero per $z < \frac{n}{n+1}$



Per $0 < z \le \frac{n}{n+1}$ $\qquad F_{Z_n}(z) = \text{Area}(T) = \frac{z}{2n(1-z)}$

Per $\frac{n}{n+1} < z \le 1$ $\qquad F_{Z_n}(z) = \text{Area}(Q) = 1 - \frac{1-z}{2z} n$

$$\Rightarrow \boxed{F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{z}{2n(1-z)} & 0 < z \le \frac{n}{n+1} \\ 1 - \frac{1-z}{2z} n & \frac{n}{n+1} < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}}$$

ii) $$F_{Z_n}(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow[p]{d} Z \overset{p.c.}{=} 1}$$

Per la convergenza p.c.

$$Z_n(\omega) = \frac{X(\omega)}{X(\omega) + \frac{Y(\omega)}{n}}$$

e $\frac{Y(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ per ogni ω

$$\Rightarrow P\left(\lim_{n\to+\infty} Z_n(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \frac{X(\omega)}{X(\omega) + \frac{Y(\omega)}{n}} = 1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow{p.c.} Z \overset{p.c.}{=} 1}$$