Cognome:.. Nome:..

N. matricola.................................

Probabilità e laboratorio
Prof. L.Beghin
Appello straordinario

9-11-2017

Esercizio n.1

Un giocatore lancia un dado regolare che dà un risultato $X = i$, per $i = 1, 2, ...6$ con $P(X = i) = 1/6$.

Si hanno 3 scatole contenenti un numero i (corrispondente al risultato del lancio del dado) di palline indistinguibili.
Si definisca l'evento $A =$ " le tre scatole sono piene " e si calcolino le seguenti probabilità :

i) $P(A)$;
ii) $P($"almeno una scatola sia vuota"$|X = 3)$,
iii) $P($"una scatola sia vuota"$|X = 3)$,
iv) $P($"due scatole siano vuote"$|X = 3)$.

Esercizio n.2

Sia X_n, $n \geq 1$, una variabile aleatoria con densitá

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & -1 < x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{n}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} .$$

i) Studiare la convergenza della successione $\{X_n\}$ per $n \to \infty$.
ii) Studiare la convergenza della successione $\{Y_n\}$, per $n \to \infty$, dove

$$Y_n = e^{-|X_n|}.$$

SOLUZIONI

ES. 1

$$P(A) = P\left[A \cup \left\{\bigcup_{i=1}^{6} (X_i = i)\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{6} P(A|X=i) \cdot P(X=i)$$

$P(A | X=i) = 0 \quad i = 1, 2$

$P(A | X=3) = \dfrac{1}{\binom{5}{3}} = \dfrac{1}{10}$

In generale è per $i \geq 3$

n° comb. con rip. con 3 urne e $i-3$ palline (tolte le 3 che vanno in ogni urna)

$P(A | X=i) = \dfrac{\text{n° casi fav.}}{\text{n° casi poss.}} = \dfrac{\binom{\cancel{3}+i-\cancel{3}-1}{i-3}}{\binom{3+i-1}{i}} = \dfrac{\binom{i-1}{i-3}}{\binom{i+2}{i}}$

n° comb con rip. con 3 urne e i pall.

$P(A | X=4) = \dfrac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{4}} = \dfrac{1}{5}$

$P(A | X=5) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{5}} = \dfrac{2}{7}$

$P(A | X=6) = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{6}} = \dfrac{5}{14}$

$\Rightarrow \quad P(A) = \dfrac{1}{6}\left[\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{14}\right] = \dfrac{11}{70}$

(2) $P(\text{"almeno 1 vuota"} | X=3)$

$= 1 - P(\text{"tutte piene"} | X=3) = 1 - P(A | X=3)$

$= 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$

n° modi di scegliere una rosse → ; ← modi di mettere le 3 palline nelle altre 2 (entrambe nere)

iii) $P(\text{"estrarre 1 rossa"} \mid X=3) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}$

$= \dfrac{6}{10}$

iv) $P(\text{"due rosse"} \mid X=3) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{3}{10}$

Infatti $\dfrac{9}{10} = \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10}$ poiché

{"almeno una rossa"} = {"estr. 1 rossa"} ∪ {"due rosse"}

Es. 2

i) $F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{1+x}{n} & -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{n} + x\left(1-\frac{1}{n}\right) & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

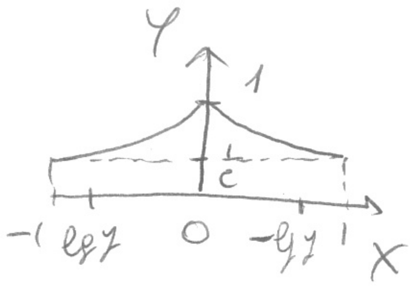
$F_{X_n}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{n}\,dt = \frac{1+x}{n}$ per $x \in (-1, 0]$

$F_{X_n}(x) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{n}\,dt + \int_{0}^{x} \left(1-\frac{1}{n}\right) dt =$ per $x \in (0, 1]$

$= \frac{1}{n} + x - \frac{x}{n} = \frac{1}{n} + x\left(1-\frac{1}{n}\right)$

Quindi $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

$X_n \xrightarrow{d} X \sim Unif(0,1)$



ii) $Y_n = e^{-|X_n|} \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ q.c.

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le \frac{1}{e} \\ ? & \frac{1}{e} < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

per $y \in \left(\frac{1}{e}, 1\right]$

$$F_{Y_n}(y) = P\left(e^{-|X_n|} < y\right) = P\left(-|X_n| < \lg y\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{e} < y < 1 \\ -1 < \lg y < 0 \end{array}}$$

$$= P\left(|X_n| > -\lg y\right)$$

$$= P\left(X_n > -\lg y\right) + P\left(X_n < \lg y\right)$$

$$= 1 - F_{X_n}(-\lg y) + F_{X_n}(\lg y)$$

$$0 < -\lg y < 1 \qquad -1 < \lg y < 0$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1 - \lg y}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} + \lg y \left(1 - \cancel{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= 1 + \lg y < 1 \qquad \text{poiché } \lg y \in (-1, 0)$$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le \frac{1}{e} \\ 1 + \lg y & \frac{1}{e} < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Quindi $Y_n = Y$ con f.r. anche per n finito