Cognome:.. **Nome:**..
Matricola:..

Prof. Beghin
9-11-2017
I esonero

Esercizio 1

In un sacchetto abbiamo 10 dadi di cui 7 regolari e 3 truccati. I dadi truccati danno 6 con probabilità 1/2, mentre l'uscita delle altre facce è uniformemente distribuita. Si supponga di scegliere a caso un dado e poi lanciarlo due volte, osservando le facce uscite. Si rimette poi il dado nel sacchetto. Si calcoli la probabilità che

i) la somma delle due facce sia 12.

ii) si ottengano due facce uguali

iii) si tratti di un dado regolare, se escono due facce uguali.

iv) si debba ripetere l'esperimento 10 volte per ottenere per la prima volta due facce uguali.

v) se si verifica l'evento al punto iv), la somma delle facce sia 12.

Esercizio 2

Un treno in arrivo ad una stazione si ferma con probabilità 1/3 nel punto del binario previsto (che indicheremo con 0). Se non si ferma nel punto giusto si fermerà lungo il binario in un punto aleatorio T con la seguente densità:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} + \frac{t}{k^2} & t \in (-a, 0) \\ \frac{1}{k} - \frac{t}{k^2} & t \in [0, a) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

per $k, a > 0$. Calcolare

i) la costante k.

ii) la probabilità che si fermi ad una distanza aleatoria dal punto giusto minore di $a/2$.

iii) il valore atteso della distanza dal punto giusto

iv) la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y = \frac{T^2}{a^2}$$

BINARIO

0

$-a$ ---|----------|----------|------> a

SOLUZIONI

ES 1

$$S \begin{cases} \xrightarrow{7/10} R \\ \xrightarrow{3/10} R^c \end{cases}$$

R = "dado regolare"
R^c = "dado truccato"
F_i = "faccia i-esimo dado" $i = 1, 2$

i) $P\left(\begin{matrix}\text{"somma due}\\ \text{facce è 12"}\end{matrix}\right) = P(F_1 = 6, F_2 = 6)$

$= P(F_1 = 6 = F_2 \mid R)\, P(R) + P(F_1 = 6 = F_2 \mid R^c)\, P(R^c)$

$= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{6^2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2^2} = 0{,}095 = \frac{17}{180}$

ii) $P(F_1 = F_2) = P(F_1 = F_2 \mid R)\, P(R) + P(F_1 = F_2 \mid R^c)\, P(R^c)$

$= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{124}{600} = 0{,}21$

poiché $P(F_1 = F_2 \mid R) = \sum_{i=1}^{6} P(F_1 = F_2 = i \mid R) = \frac{1}{6}$

$P(F_1 = F_2 \mid R^c) = \sum_{i=1}^{5} P(F_1 = F_2 = i \mid R^c) + P(F_1 = F_2 = 6 \mid R^c)$

$= \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{\cancel{100}_{20}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

iii) $P(R \mid F_1 = F_2) = \dfrac{P(F_1 = F_2 \mid R)\, P(R)}{P(F_1 = F_2)}$

$= \dfrac{\frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{7}{\cancel{10}}}{\frac{124}{\cancel{600}\, 10}} = \frac{70}{124} = 0{,}56$

iv) $P\left(\begin{matrix}\text{"}F_1 = F_2 \text{ per la prima}\\ \text{volta al 10°"}\end{matrix}\right) = p\,(1-p)^9 = 0{,}21 \cdot 0{,}79^9$

$= 0{,}02$

con $p = P(F_1 = F_2) = 0{,}21$

v) chiamo A = "evento al punto (iv)"

$$P(F_1=F_2=6 \mid A) = \frac{P(A \cap (F_1=F_2=6))}{P(A)}$$

per l'indip. tra le prove

$$= \frac{P(\text{"nove volte facce diverse"})\, P(F_1=F_2=6)}{P(A)}$$

$$= \frac{[1-P(F_1=F_2)]^8 \cdot 0{,}095}{0{,}02}$$

$$= \frac{[1-0{,}21]^8 \cdot 0{,}095}{0{,}02} = \frac{0{,}12 \cdot 0{,}095}{0{,}02} = 0{,}57$$

Es. 2

i) $$1 = \int_{-e}^{e} f_T(t)\,dt = \frac{1}{k}\int_{-e}^{e} dt + \frac{1}{k^2}\int_{-e}^{0} t\,dt - \frac{1}{k^2}\int_0^e t\,dt$$

$$= \frac{2e}{k} + \frac{1}{k^2}\left\{\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-e}^{0} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^e\right\}$$

$$= \frac{2e}{k} - \frac{\cancel{2}e^2}{\cancel{2}k^2} = 1 \implies k=e$$

ii) $$X = \begin{cases} 0 & P(A) = \frac{1}{3} \\ |T| & P(A^c) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

dove
X = "distanza da 0"
A = "si ferma in 0"

$$P\left(X<\frac{e}{2}\right) = P\left[X<\frac{e}{2}, (A \cup A^c)\right] =$$

$$= P\left(X<\frac{e}{2} \,\middle|\, A\right)P(A) + P\left(X<\frac{e}{2} \,\middle|\, A^c\right)P(A^c)$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{P\left(0<\frac{e}{2}\right)}_{=1} + P\left(X<\frac{e}{2} \,\middle|\, X=|T|\right)\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \; P\left(|T| < \frac{e}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \; P\left(-\frac{e}{2} < T < \frac{e}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} f_T(t)\,dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-\frac{e}{2}}^{0} \left(\frac{1}{e} + \frac{t}{e^2}\right) dt +$$

$$+ \frac{2}{3} \int_{0}^{\frac{e}{2}} \left(\frac{1}{e} - \frac{t}{e^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3e^2} \left\{ \frac{t^2}{2} \Big]_{-\frac{e}{2}}^{0} - \frac{t^2}{2} \Big]_{0}^{\frac{e}{2}} \right\}$$

$$= 1 + \frac{2}{3\cancel{e^2}} \left(-\frac{\cancel{e^2}}{8} - \frac{\cancel{e^2}}{8}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

iii) $\mathbb{E} X = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \mathbb{E}|T|$ (vedi dopo)

iv) $Y = \frac{T^2}{e^2} \in (0, 1)$ p.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ ? & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P\left(\frac{T^2}{e^2} < y\right)$$

$$= P\left((T < e\sqrt{y}) \cap (T > -e\sqrt{y})\right)$$

$$= \int_{-e\sqrt{y}}^{e\sqrt{y}} f_T(t)\,dt =$$

$$= \int_{-e\sqrt{y}}^{0} \left(\frac{1}{e} + \frac{t}{e^2}\right) dt + \int_{0}^{e\sqrt{y}} \left(\frac{1}{e} - \frac{t}{e^2}\right) dt$$

$$= \frac{2a\sqrt{y}}{a} - \frac{2t^2}{a^2 \cancel{y}} \Big]_0^{a\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} - y$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 2\sqrt{y} - y & 0 < y \le 1 \\ y & y > 1 \end{cases}$$

(ii) $\mathbb{E}X = \frac{2}{3}\mathbb{E}|T|$

$$= \frac{2}{3}\int_{-a}^{a} |t|\, f_T(t)\, dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{ \int_{-a}^{0} (-t)\left(\frac{1}{a} + \frac{t}{a^2}\right) dt + \int_0^a t\left(\frac{1}{a} - \frac{t}{a^2}\right) dt \right\}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{3a}\left[-\frac{t^2}{\cancel{2}}\Big]_{-a}^{0} + \frac{t^2}{\cancel{2}}\Big]_0^a \right] + \frac{2}{3a^2}\left[-\frac{t^3}{3}\Big]_{-a}^{0} - \frac{t^3}{3}\Big]_0^a \right]$$

$$= \frac{a}{3}(1+1) + \frac{2a}{9}\left[-1-1\right] = \frac{2}{9}a$$