

Cognome:..... Nome:.....
 Matricola:.....

Prof. Beghin
 9-11-2017
 I esonero

Esercizio 1

In un sacchetto abbiamo 10 dadi di cui 7 regolari e 3 truccati. I dadi truccati danno 6 con probabilità $1/2$, mentre l'uscita delle altre facce è uniformemente distribuita. Si supponga di scegliere a caso un dado e poi lanciarlo due volte, osservando le facce uscite. Si rimette poi il dado nel sacchetto. Si calcoli la probabilità che

- i) la somma delle due facce sia 12.
- ii) si ottengano due facce uguali
- iii) si tratti di un dado regolare, se escono due facce uguali.
- iv) si debba ripetere l'esperimento 10 volte per ottenere per la prima volta due facce uguali.
- v) se si verifica l'evento al punto iv), la somma delle facce sia 12.

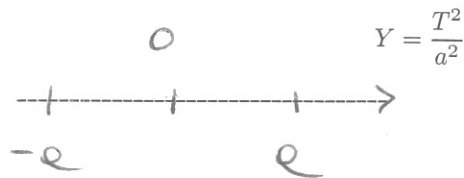
Esercizio 2

Un treno in arrivo ad una stazione si ferma con probabilità $1/3$ nel punto del binario previsto (che indicheremo con 0). Se non si ferma nel punto giusto si fermerà lungo il binario in un punto aleatorio T con la seguente densità:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} + \frac{t}{k^2} & t \in (-a, 0) \\ \frac{1}{k} - \frac{t}{k^2} & t \in [0, a) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

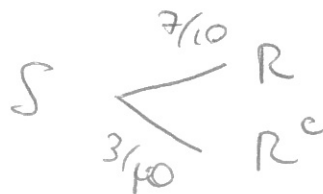
per $k, a > 0$. Calcolare

- i) la costante k .
- ii) la probabilità che si fermi ad una distanza aleatoria dal punto giusto minore di $a/2$.
- iii) il valore atteso della distanza dal punto giusto
- iv) la distribuzione di probabilità della v.a.



BINARIO

1



$R =$ "dado regolare"
 $R^c =$ "dado truccato"
 $F_i =$ "facce i-esime dadi"
 $i = 1, 2$

SOLUZIONI

ES 1

$$i) P(\text{"somme des faces"} = 12) = P(F_1=6, F_2=6)$$

$$= P(F_1=6=F_2 | R) P(R) + P(F_1=6=F_2 | R^c) P(R^c)$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{6^2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2^2} = 0,095 = \frac{17}{180}$$

$$ii) P(F_1=F_2) = P(F_1=F_2 | R) P(R) + P(F_1=F_2 | R^c) P(R^c)$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{40} = \frac{124}{600} = 0,21$$

pour R $P(F_1=F_2 | R) = \sum_{i=1}^6 P(F_1=F_2=i | R) = \frac{1}{6}$

$$P(F_1=F_2 | R^c) = \sum_{i=1}^5 P(F_1=F_2=i | R^c) + P(F_1=F_2=6 | R^c)$$

$$= \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$iii) P(R | F_1=F_2) = \frac{P(F_1=F_2 | R) P(R)}{P(F_1=F_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{124}{600}} = \frac{70}{124} = 0,56$$

$$iv) P(\text{"}F_1=F_2 \text{ per la prima volta al } 10^{\text{es}}\text{"}) = P((1-p)^9) = 0,21 \cdot 0,79^9 = 0,02$$

ou $p = P(F_1=F_2) = 0,21$

v) disiamo $A = \text{"evento al punto (iv)"}$

$$P(F_1 = F_2 = 6 | A) = \frac{P(A \cap (F_1 = F_2 = 6))}{P(A)}$$

per l'indip.
tra le prove

$$= \frac{P(\text{"nove volte
lece diverse"}) P(F_1 = F_2 = 6)}{P(A)}$$

$$= \frac{[1 - P(F_1 = F_2)]^9 \cdot 0,095}{0,02}$$

$$= \frac{[1 - 0,21]^9 \cdot 0,095}{0,02} = \frac{0,12 \cdot 0,095}{0,02} = 0,57$$

Es. 2

$$i) 1 = \int_{-e}^e f_T(t) dt = \frac{1}{k} \int_{-e}^e dt + \frac{1}{k^2} \int_{-e}^e t dt = \frac{1}{k^2} \int_0^e t dt$$

$$= \frac{2e}{k} + \frac{1}{k^2} \left\{ \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-e}^0 - \frac{t^2}{2} \right\}_0^e$$

$$= \frac{2e}{k} - \frac{2e^2}{2k^2} = 1 \Rightarrow k = 2e$$

$$ii) X = \begin{cases} 0 \\ |T| \end{cases}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(A^c) = \frac{2}{3}$$

dove

$X = \text{"distante da } 0 \text{"}$

$A = \text{"riserva in } 0 \text{"}$

$$P(X < \frac{e}{2}) = P\left[X < \frac{e}{2}, (A \cup A^c)\right] =$$

$$= P(X < \frac{e}{2} | A) P(A) + P(X < \frac{e}{2} | A^c) P(A^c)$$

$$= \frac{1}{3} P(0 < \frac{e}{2}) + P(X < \frac{e}{2} | X = |T|) \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P(|T| < \frac{e}{2}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P(-\frac{e}{2} < T < \frac{e}{2})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} f_T(t) dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-\frac{e}{2}}^0 \left(\frac{1}{e} + \frac{t}{e^2}\right) dt +$$

$$+ \frac{2}{3} \int_0^{\frac{e}{2}} \left(\frac{1}{e} - \frac{t}{e^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3e^2} \left\{ \frac{t^2}{2} \Big|_{-\frac{e}{2}}^0 - \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{e}{2}} \right\}$$

$$= 1 + \frac{2}{3e^2} \left(-\frac{e^2}{8} - \frac{e^2}{8} \right) = 1 - \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6} \right)$$

(iii) $E X = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} E|T|$ (vedi sopra)

(iv) $Y = \frac{T^2}{e^2} \in (0, 1)$ p.c.

$$F_Y(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ ? & 0 < z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(z) = P(Y < z) = P\left(\frac{T^2}{e^2} < z\right)$$

$$= P((T < e\sqrt{z}) \cap (T > -e\sqrt{z}))$$

$$= \int_{-e\sqrt{z}}^{e\sqrt{z}} f_T(t) dt =$$

$$= \int_{-e\sqrt{z}}^0 \left(\frac{1}{e} + \frac{t}{e^2}\right) dt + \int_0^{e\sqrt{z}} \left(\frac{1}{e} - \frac{t}{e^2}\right) dt$$

$$= \left. \frac{2e\sqrt{z}}{e} - \frac{2t^2}{e^2z} \right|_0^{e\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} - z$$

$$\Rightarrow f_Y(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 2\sqrt{z} - z & 0 < z \leq 1 \\ z & z > 1 \end{cases}$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}X = \frac{2}{3} \mathbb{E}|T|$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-e}^e |t| f_T(t) dt =$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ \int_{-e}^0 (-t) \left(\frac{1}{e} + \frac{t}{e^2} \right) dt + \int_0^e t \left(\frac{1}{e} - \frac{t}{e^2} \right) dt \right\}$$

$$= \frac{2}{3e} \left[-\frac{t^2}{2} \Big|_{-e}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^e \right] + \frac{2}{3e^2} \left[-\frac{t^3}{3} \Big|_{-e}^0 - \frac{t^3}{3} \Big|_0^e \right]$$

$$= \frac{e}{3} (1+1) + \frac{2e}{9} [-1-1] = \frac{2}{9} e$$