Cognome:.................... Nome:..
Matricola:..

Probabilità e Laboratorio di Probabilità
Prof. L.Beghin
13-9-2017

Esercizio n.1

Alberto dispone di una moneta che dà testa con probabilità $p \in (0,1)$ (e croce con probabilità $1-p$) e di un'urna che contiene inizialmente una palla verde ed una rossa. Alberto lancia la moneta: se esce croce aggiunge una palla verde nell'urna (e poi lancia di nuovo la moneta), se invece esce testa egli estrae una palla dall'urna.

i) Calcolare la probabilità che la pallina estratta da Alberto sia verde.

ii) Sapendo che Alberto ha estratto una pallina verde, determinare la distribuzione di probabilità del numero totale di palline nell'urna subito prima dell'estrazione di Alberto.

[Suggerimento: si ricorda l'espansione in serie $\ln(1-x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ per $x \in (0,1)$]

Esercizio n.2

Siano U e V v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $(0,1)$. Calxolare

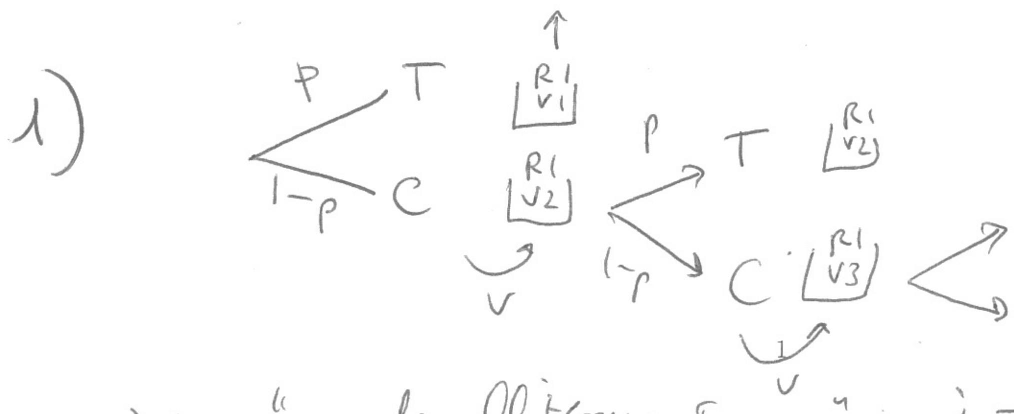
i) la probabilità che V sia minore di U^n

ii) la convergenza in distribuzione della successione U^n, per $n \to \infty$

iii) la distribuzione limite della successione

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(U_j^k - \frac{1}{k+1}\right)}{\sqrt{n}},$$

per $n \to \infty$, dove le v.a. U_j sono indipendenti e tutte con distribuzione uniforme in $(0,1)$.



V_i = "verde all'i-esimo turno" $i = 1, 2, \ldots$

i) $P(\text{verde}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(V_i)$

$= \sum$

$$P(V_i) = p(1-p)^{i-1}\frac{i}{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad P(\text{verde}) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}\frac{i}{i+1} =$$

$$= p\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}\left(1-\frac{1}{i+1}\right)$$

$$= 1 - p\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-p)^{i-1}}{i+1}\,\frac{(1-p)^2}{(1-p)^2}$$

$$= 1 - \frac{p}{(1-p)^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-p)^{i+1}}{i+1} \qquad i+1=l$$

$$= 1 - \frac{p}{(1-p)^2}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{(1-p)^{l}}{l} \qquad \text{con } 1-p \in (0,1)$$

$$= 1 - \frac{p}{(1-p)^2}\left[-\lg(\cancel{1}-\cancel{1}+p) - (1-p)\right]$$

$$= 1 - \frac{p}{(1-p)^2}\left[p - 1 - \lg(p)\right]$$

$$= \frac{1+\cancel{p^2}-2p-\cancel{p^2}+p+p\lg p}{(1-p)^2} = \frac{1-p+p\lg p}{(1-p)^2} =$$

$$= \frac{1-p(1-\lg p)}{(1-p)^2} \qquad [\text{Nota: } \lg p < 0]$$

ii) N = "n° palline totali prima dell'estrazione"

$$P(N=n \mid V) = \frac{P(N=n, V)}{P(V)} = \qquad n = 2, 3, \dots$$

V = "esce verde"

$$= \frac{(1-p)^{\cancel{n-2}} p \frac{n-1}{n}}{\frac{1-p(1-qp)}{\cancel{(1-p)^2}}} = \frac{(1-p)^n p \frac{n-1}{n}}{1-p(1-qp)}$$

2) i) $P(V < U^n) =$

$$= \int_0^1 P(V<z)\, f_{U^n}(z)\, dz$$

$$f_{U^n}(z) = \frac{d}{dz} P(U^n < z) = \frac{d}{dz} P(U < \sqrt[n]{z}) = \frac{d}{dz} \sqrt[n]{z}$$

$$= \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{per } z \in (0,1)$$

Quindi $P(V < U^n) = \int_0^1 \cancel{z} \cdot \frac{1}{n} z^{\cancel{\frac{1}{n}-1}} dz = \frac{1}{n} \left. \frac{z^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \right]_0^1$

$$= \frac{1}{n+1}$$

ii) $$F_{U^n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \sqrt[n]{z} & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$$

Quindi $U^n \underset{p}{\xrightarrow{d}} Z \overset{p.c.}{=} 0$

iii) $$\mathbb{E}(U_j^k) = \int_0^1 \frac{1}{k} z^{\frac{1}{k}-1} z\, dz = \frac{1}{k+1} \qquad \forall j$$

$$V(U_j^k) = \mathbb{E}(U_j^{2k}) - (\mathbb{E}U_j^k)^2 \qquad \forall j$$

$$= \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^2 \cancel{+1} \cancel{+2k} \cancel{-2k} \cancel{-1}}{(2k+1)(k+1)^2} = \frac{k^2}{(2k+1)(k+1)^2}$$

Quindi, applicando il TLC, si ha

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} U_j^k - \frac{n}{k+1}}{\sqrt{n \frac{k^2}{(2k+1)(k+1)^2}}} \xrightarrow[d]{n \to +\infty} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum_{j=1}^{n} U_j^k - \frac{n}{k+1}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{k^2}{(2k+1)(k+1)}\right)$$