Cognome:.. Nome:..
Matricola:..

Prof. Beghin
19-7-2017

Esercizio 1

Un gene è composto di due elementi, ciascuno dei quali può essere di tipo **A** oppure di tipo **a**. Nella popolazione esistono quindi tre tipi di geni: di tipo **AA**, **Aa**, **aa**. In fase di accoppiamento si scelgono due geni, indipendentemente l'uno dall'altro, e ciascuno di essi trasmette uno dei due caratteri a caso e indipendentemente l'uno dall'altro. Si supponga che inizialmente ciascuno dei tre tipi genetici venga selezionato con probabilità, rispettivamente, p, q, r (con $p+q+r=1$)

Calcolare la distribuzione di probabilità dei tre tipi genetici alla generazione successiva (verificando che sommi a uno).

Esercizio 2

Le v.a. X_n e Y sono indipendenti; Y ha distribuzione Geometrica di parametro p, mentre X_n è così distribuita

$$X_n = \begin{cases} 0, & \frac{n-1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \end{cases}$$

i) ricavare la distribuzione della v.a. $Z_n = X_n + Y$ (ovvero $\Pr\{Z_n = z\}$ per $z = 1$ e per $z = 2, 3....$);

ii) calcolare il valore atteso di Z_n;

ii) studiare la convergenza della successione in distribuzione e quasi certa.

SOLUZIONI

ES. 1 Def. A_i = "Tipo A nella i-esima generazione"

a_i = "Tipo a " " " "

per $i=1,2$

$P(A_1A_1)=p \quad P(A_1a_1)=q \quad P(a_1a_1)=r$

$P(A_2A_2) = P(A_2)P(A_2) = P(A_2)^2$

$= \Big[P(A_2|A_1A_1)\underbrace{P(A_1A_1)}_{=p} + \cancel{P(A_2|a_1a_1)}_{=0}\underbrace{P(a_1a_1)}_{=r} + P(A_2|A_1a_1)\underbrace{P(A_1a_1)}_{=q}\Big]^2$

$$= \left[p \cdot 1 + q \cdot \tfrac{1}{2} \right]^2 = \left(p + \frac{q}{2} \right)^2$$

$$P(a_2 a_2) = \Big[\underbrace{\cancel{P(a_2 | A_1 A_1)}}_{=0} P(A_1 A_1) + P(a_2 | A_1 a_1) \underbrace{P(A_1 a_1)}_{=q} + P(a_2 | a_1 a_1) \underbrace{P(a_1 a_1)}_{=r} \Big]^2$$

$$= \left[\frac{q}{2} + r \right]^2$$

$$P(A_2 a_2) = 2 \Big[P(A_2 | A_1 A_1) P(A_1 A_1) + P(A_2 | A_1 a_1) P(A_1 a_1) + \cancel{P(A_2 | a_1 a_1) P(a_1 a_1)} \Big] \Big[\cancel{P(a_2 | A_1 A_1)} P(A_1 A_1) + P(a_2 | A_1 a_1) P(A_1 a_1) + P(a_2 | a_1 a_1) P(a_1 a_1) \Big]$$

$$= 2 \left[p + \frac{q}{2} \right] \left[r + \frac{q}{2} \right]$$

Infatti $\quad P(A_2 A_2) + P(a_2 a_2) + P(A_2 a_2)$

$$= p^2 + \frac{q^2}{4} + pq + \frac{q^2}{4} + r^2 + qr + 2pr + \cancel{2}\frac{pq}{\cancel{2}} + \cancel{2}\frac{rq}{\cancel{2}} + \frac{q^2}{2}$$

$$= p^2 + q^2 + r^2 + 2pr + 2pq + 2qr = (p + q + r)^2 = 1$$

Es. 2

$Y \sim \text{Geom}(p)$ $\quad X_n = \begin{cases} 0 & \frac{n-1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \end{cases}$ (3)

$Z_n = X_n + Y \in \{1, 2, \dots\}$ p.c.

i) $P(Z_n = z) = P(X_n + Y = z) = P(X_n + Y = z, \Omega)$

$= P(X_n + Y = z, X_n = 0) + P(X_n + Y = z, X_n = 1)$

$= P(X_n + Y = z \mid X_n = 0) \underbrace{P(X_n = 0)}_{= \frac{n-1}{n}} + P(X_n + Y = z \mid X_n = 1) \cdot \underbrace{P(X_n = 1)}_{= \frac{1}{n}}$

$= \frac{n-1}{n} P(Y = z) + \frac{1}{n} P(Y = z-1)$

$P(Y=0) = 0$ quindi

per $z = 1$

$P(Z_n = 1) = \frac{n-1}{n} \cdot P(Y = 1) + 0 = \frac{n-1}{n} \cdot p$

per $z \geq 2$

$P(Z_n = z) = \frac{n-1}{n} p q^{z-1} + \frac{1}{n} p q^{z-2}$

Infatti $\frac{n-1}{n} p + \sum_{j=2}^{\infty} \left[\frac{n-1}{n} p q^{j-1} + \frac{1}{n} p q^{j-2} \right]$

$= \frac{n-1}{n} p + \frac{n-1}{n} p q \sum_{l=0}^{\infty} q^l + \frac{1}{n} p \sum_{l=0}^{\infty} q^l$

$= \frac{n-1}{n} p + \frac{n-1}{n} \cancel{p} q \frac{1}{\cancel{1-q}} + \frac{1}{n} \cancel{p} \frac{1}{\cancel{1-q}}$

$= \frac{n-1}{n} p + \frac{n-1}{n} q + \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \underbrace{(p+q)}_{=1} + \frac{1}{n} = 1$

ii) $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(Y)$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$$

iii) per $n \to +\infty$ $\quad P(Z_n = 1) \to p$

$$P(Z_n = z) \to p q^{z-1}$$

$z \geq 2$

Quindi $Z_n \xrightarrow{d} \cancel{\text{Geom}}\; Y \sim \text{Geom}(p)$

Infatti $X_n = \begin{cases} 0 & \frac{n-1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \end{cases} \xrightarrow{p.c.} 0$

e quindi $Z_n = X_n + Y \xrightarrow{p.c.} Y \sim \text{Geom}(p)$