Cognome:... **Nome:**...
Matricola:...
Data orale: ☐..**16 giugno 2017** ☐..**21 luglio 2017**

Prof. Beghin
14-6-2017

Esercizio 1

In una città vi sono sette musei. Tre visitatori scelgono ognuno un museo a caso da visitare. Calcolare la probabilità che

1. non scelgano tutti lo stesso museo.
2. scelgano tre musei differenti.
3. almeno due scelgano lo stesso museo.
4. Scrivere la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X che conta il numero di musei che ricevono almeno un visitatore.
5. Calcolare la probabilità che tutti vadano nei primi due musei, sapendo che almeno cinque restano vuoti.

Esercizio 2

Sia X una v.a. con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha K^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq K \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per $K, \alpha > 0$.

1. Ricavare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y = \log X$$

2. Studiare la convergenza della successione di v.a.

$$\sum_{j=1}^{n} \log \sqrt[n]{X_j},$$

dove le X_j sono v.a. indipendenti e tutte con densità $f_X(x)$.

SOLUZIONI

ES. 1 A = "non scelgano tutti lo stesso"

1) $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{7 \cdot 1 \cdot 1}{7^3} = \frac{48}{49} = 0{,}98$

(2)

2) $P(\text{"3 diversi"}) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{7^3} = \frac{30}{49} = 0{,}61$

3) $P(\text{"almeno 2 lo stesso"}) = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49} = 0{,}39$

4) $X =$ "n° musei con almeno 1 visitatore"
$=$ "n° musei non vuoti"

$X \in \{1, 2, 3\}$ p.c.

$$P(X=1) = P(A^C) = \frac{1}{49}$$

$$P(X=3) = P(\text{"3 diversi"}) = \frac{30}{49}$$

$$P(X=2) = 1 - \frac{1}{49} - \frac{30}{49} = \frac{18}{49}$$

[oppure $P(X=2) = \frac{7 \cdot 6 \cdot \binom{3}{2}}{7^3} = \frac{18}{49}$]

5) $$P\left(M_1 \text{ e } M_2 \,\middle|\, \begin{matrix}\text{almeno}\\ \text{5 vuoti}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(M_1^C \text{ e } M_2^C, \begin{matrix}\text{almeno}\\ \text{5 vuoti}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{almeno}\\ \text{5 vuoti}\end{matrix}\right)}$$

$$= \frac{P(M_1 \text{ e } M_2)}{P\left(\begin{matrix}\text{esatt.}\\ \text{5 vuoti}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{esatt.}\\ \text{6 vuoti}\end{matrix}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{7^3}}{P(X=2) + P(X=1)} = \frac{\frac{4}{7^3}}{\frac{18}{49} + \frac{1}{49}} = \frac{4}{7 \cdot 19} = 0{,}03$$

ES. 2 $\quad Y = \lg X$

1) $Y \in (\lg k, +\infty)$ p.c.

per $y \geq \lg k$

$$F_Y(y) = P(\lg X < y) = P(X < e^y)$$

$$= \int_k^{e^y} \alpha k^\alpha x^{-\alpha-1}\, dx =$$

$$= \frac{k^\alpha \cdot \cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}} \left[-x^{-\alpha} \right]_k^{e^y} = k^\alpha \left[k^{-\alpha} - e^{-\alpha y} \right]$$

$$= 1 - k^\alpha e^{-\alpha y}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq \lg k \\ 1 - k^\alpha e^{-\alpha y} & y > \lg k \end{cases}$$

verifica $\quad$ per $y = \lg k \quad F_Y(\lg k^+) = 1 - k^\alpha e^{-\alpha \lg k} = 1 - k^\alpha k^{-\alpha} = 0 = F_Y(\lg k)$

per $y \to +\infty \quad \lim_{y \to +\infty} F_Y(y) = 1$

oppure $\quad$ poiché $g(X) = \lg(X)$ è crescente e derivabile

e $h(y) = g^{-1}(y) = e^y = x$

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\, |h'(y)| \qquad y \geq \lg k$$

$$= \frac{\alpha k^\alpha}{e^{y\alpha + \cancel{y}}} \cdot \cancel{e^y} = \alpha k^\alpha e^{-\alpha y} = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

2) $Z_n = \sum_{j=1}^{n} \lg \sqrt[n]{X_j} = \sum_{j=1}^{n} \lg (X_j)^{\frac{1}{n}}$ (4)

$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \lg X_j \xrightarrow{P.C} \mathbb{E}(\lg X)$ poiché le X_j sono i.i.d

$$\mathbb{E}(\lg X_j) = \int_k^{+\infty} \lg x \, \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx$$

<u>oppure</u> (più semplice) $= \int_{\lg k}^{+\infty} y \, f_Y(y) \, dy =$

$$= \int_{\lg k}^{+\infty} y \, \alpha k^\alpha e^{-\alpha y} dy =$$

per parti $= \cancel{\alpha} k^\alpha \left\{ \left[-\frac{y e^{-\alpha y}}{\cancel{\alpha}} \right]_{\lg k}^{+\infty} + \int_{\lg k}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha y}}{\cancel{\alpha}} dy \right\}$

$$= k^\alpha \left\{ \lg k \, e^{-\alpha \lg k} + \left[-\frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} \right]_{\lg k}^{+\infty} \right\}$$

$$= \cancel{k^\alpha} \lg k \, \cancel{k^{-\alpha}} + \frac{\cancel{k^{-\alpha}}}{\alpha} \cdot \cancel{k^\alpha} = \lg k + \frac{1}{\alpha}$$

$\Longrightarrow \quad Z_n \xrightarrow{P.C} \lg k + \frac{1}{\alpha}$ per la LFGN