1

Cognome:.. **Nome:**..
Matricola:..

Prof. Beghin
14-2-2017

Esercizio 1

Un'emittente di segnali invia o la sequenza AAAA, con probabilità p_1, o la sequenza BBBB, con probabilità p_2, o la sequenza CCCC, con probabilità $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Ogni lettera viene ricevuta giusta con probabilità α, indipendentemente dalle altre. Quando una lettera (per es. B) viene ricevuta sbagliata, le due alternative (nell'es. A e C) sono equiprobabili.

Calcolare la probabilità che la sequenza emessa sia AAAA avendo osservato in ricezione la sequenza ABCA.

Esercizio 2

La v.a. doppia (X, Y) ha funzione di densità

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}e^{-x/y}}{y} & x, y > 0 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

i) calcolare il $\mathbb{E}(X|Y = y)$
ii) le v.a. sono indipendenti?
iii) Calcolare la $P(\max(X, Y) = X)$

Esercizio 3

Le v.a. X e Y_λ sono indipendenti ed esponenziali con parametro rispettivamente 1 e λ. Trovare il limite in distribuzione della successione

$$Z_\lambda = \frac{1}{X + Y_\lambda}$$

i) per $\lambda \to 0$
ii) per $\lambda \to +\infty$

SOLUZIONI

ES.1 Applicando la formula di Bayes

$$P(AAAA|ABCA) = \frac{P(ABCA|AAAA)\,P(AAAA)}{P(ABCA|AAAA)\,P(AAAA) + P(ABCA|BBBB)\,P(BBBB) + P(ABCA|CCCC)\,P(CCCC)}$$

$$= \frac{p_1 \cdot \alpha^2 \cancel{(1-\alpha)^2} \cdot \frac{1}{4}}{p_1 \alpha^2 \cancel{(1-\alpha)^2} \frac{1}{4} + p_2 \cancel{\alpha}(1-\alpha)^3 \frac{1}{8} + p_3 \cancel{\alpha}(1-\alpha)^3 \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{2 p_1 \alpha}{2 p_1 \alpha + (1-\alpha)(1-p_1)}$$

<u>Es. 2</u>

i) $\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \int_0^{+\infty} x \, f_{X|Y}(x|y) \, dx$

$$= \int_0^{+\infty} x \, \frac{e^{-\frac{x}{y} - y}}{y \cdot f_Y(y)} \, dx$$

ma $f_Y(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y} \, dx = \left[-e^{-\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{+\infty} \cdot e^{-y}$

$$= e^{-y}$$

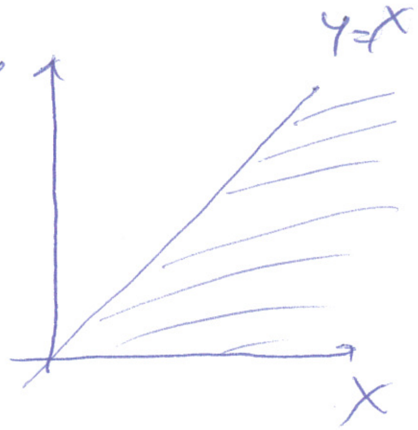
Quindi $\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \int_0^{+\infty} \frac{x \, e^{-\frac{x}{y}}}{y} \, dx = y$

poiché è il v.a. di una $Exp\left(\frac{1}{y}\right)$

ii) Le v.a. <u>non</u> possono essere <u>indipendenti</u> poiché $\mathbb{E}(X \mid Y = y) \neq \mathbb{E}X$ poiché quest'ultimo non può dipendere da y

iii) $P(\max(X,Y)=X) = P(X \geq Y)$

$$= \int_0^{+\infty} dz \int_y^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{z}} e^{-z}}{z} \, dx$$



$$= \int_0^{+\infty} e^{-z} \left[-e^{-\frac{x}{z}} \right]_y^{+\infty} dz$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-1-z} \, dz = e^{-1} \left[-e^{-z} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

Es. 3

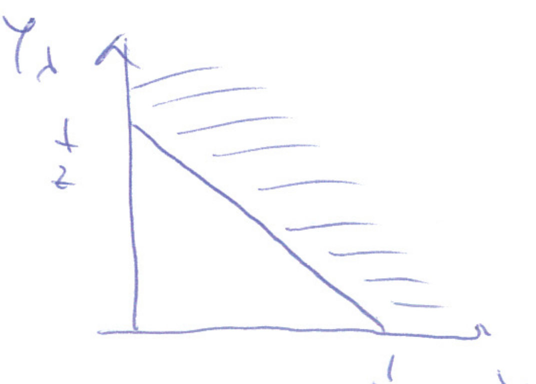
$X \sim Exp(1)$
$Y_\lambda \sim Exp(\lambda)$ $\Rightarrow$ $Z_\lambda \in (0,+\infty)$ p.c.

$$Z_\lambda = \frac{1}{X+Y_\lambda}$$

per $z>0$

$$P(Z_\lambda < z) = P\left(\frac{1}{X+Y_\lambda} < z \right) =$$

$$= P\left(Y_\lambda > \frac{1}{z} - X\right) = 1 - P\left(Y_\lambda < \frac{1}{z} - X\right)$$



$$= 1 - \int_0^{\frac{1}{z}} dx \int_0^{\frac{1}{z}-x} dy \, e^{-x} \lambda e^{-\lambda y}$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{1}{z}} e^{-x} \left(-e^{-\lambda y} \right)_0^{\frac{1}{z}-x} dx$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{1}{z}} e^{-x} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{z} + \lambda x} \right) dx$$

$$= 1 - \left[-e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{z}} + \left[-\frac{e^{-(1-\lambda)x}}{1-\lambda}\right]_0^{\frac{1}{z}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{z}}$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{z}} + \frac{e^{-\frac{\lambda}{z}}}{1-\lambda}\left[1 - e^{-\frac{1-\lambda}{z}}\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{z}} + \frac{e^{-\frac{\lambda}{z}}}{1-\lambda} - \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}\left(e^{-\frac{\lambda}{z}} - \lambda e^{-\frac{1}{z}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F_{Z_\lambda}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{1}{1-\lambda}\left(e^{-\frac{\lambda}{z}} - \lambda e^{-\frac{1}{z}}\right) & \end{cases}$$

<u>verifica:</u> per $z \to +\infty$ $F_{Z_\lambda}(z) \to 1$ e $F_{Z_\lambda}(0^+) = 0$

<u>per $\lambda \to +\infty$</u> $$F_{Z_\lambda}(z) \to \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ e^{-\frac{1}{z}} & z > 0 \end{cases}$$

per $z \to +\infty$ $F_Z(z) \to 1$ ed è non decrescente

$$\Rightarrow \quad \underline{Z_\lambda \xrightarrow{d} Z} \text{ con } \cancel{\text{densità}} \text{ f.r.}$$

<u>per $\lambda \to 0$</u> $$F_{Z_\lambda}(z) \to \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Z_\lambda \xrightarrow[P]{d} Z \overset{P\text{-c.}}{=} 0}$$