1

Cognome:.. Nome:..
Matricola:...

BARRARE I QUADRATINI SEGUENTI:
Data orale: ☐ 19 gennaio 2017..........☐ 16 febbraio 2017

☐ ESAME COMPLETO (tre ore)
☐ RECUPERO I ESONERO (svolgere esercizi 1 e 2 in due ore)
☐ RECUPERO II ESONERO (svolgere esercizi 2 e 3 in due ore)

Prof. Beghin
17-1-2017
COMPITO A

Esercizio 1

Ad uno sportello di banca si possono presentare X clienti. I valori assunti dalla v.a. X sono 1 e 2 con probabilità rispettivamente uguale a 0.4 e 0.6. La durata del servizio allo sportello è Y_i, per il cliente i-esimo, che è una v.a. indipendente da X e che vale 20 (minuti) o 30 (minuti) con uguale probabilità. Si calcoli

i) la distribuzione di probabilità della v.a. Z che corrisponde alla durata totale delle visite.

ii) il valor medio di Z

iii) la probabilità che il servizio del primo cliente servito sia durato 20 min, sapendo che la durata totale è stata pari a 50 min. Si interpreti il risultato.

Esercizio 2

Siano X e Y v.a. indipendenti ed entrambe uniformi in $(0, 1)$. Si calcoli la distribuzione della seguente v.a.

$$Z = \frac{\log X}{\log X + \log Y}$$

Esercizio 3

Siano X e Y v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Si studi la convergenza in distribuzione, probabilità e quasi certa delle successioni:

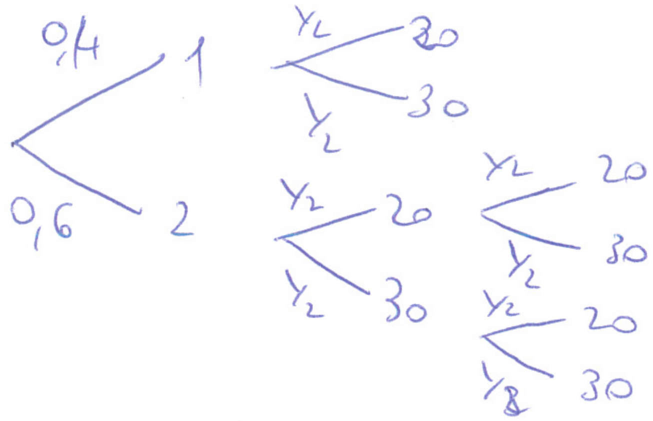
$$Z_n = \frac{X^n}{Y^n} \qquad \text{e} \qquad W_n = \frac{X^{1/n}}{Y^{1/n}}$$

SOLUZIONI

ES. 1

$$X = \begin{cases} 1 & 0,4 \\ 2 & 0,6 \end{cases} \qquad Y_i = \begin{cases} 20 & 1/2 \\ 30 & 1/2 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} Y_1 & \text{se } X = 1 \\ Y_1 + Y_2 & \text{se } X = 2 \end{cases}$$



$$Z \in \underbrace{\{20, 30, 40, 50, 60\}}_{S_Z} \text{ q.c.}$$

i) $P(Z=20) = P(Z=30) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

$P(Z=40) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$

$P(Z=50) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \frac{3}{10}$ $\qquad \sum_{i \in S_Z} P(Z=i) = 1$

$P(Z=60) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$

ii) $E(Z) = \frac{200+120+300+180}{20} = 40$

iii) $$P(Y_1=20 \mid Z=50) = \frac{P(Y_1=20, Z=50, X=2)}{P(Z=50, X=2)}$$

$$= \frac{P(Y_1=20, Y_2=30 \mid X=2)\, \cancel{P(X=2)}}{P(Z=50 \mid X=2)\, \cancel{P(X=2)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

Condizionando su $(Z=50)$, $(Y_1=20)$ e $(Y_1=30)$ sono ancora equiprobabili e $(Y_1=20)$ è indipendente da $(Z=50)$.

ES. 2

$X, Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ indip.

$$Z = \frac{\lg X}{\lg X + \lg Y}$$

$\lg X$ e $\lg Y$ sono ≤ 0 poiché $X, Y \in (0,1)$

$Z \in (0,1)$ P.C.

Calcolo $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ ? & 0 < z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P\left(\frac{\lg X}{\lg X + \lg Y} < z\right)$$

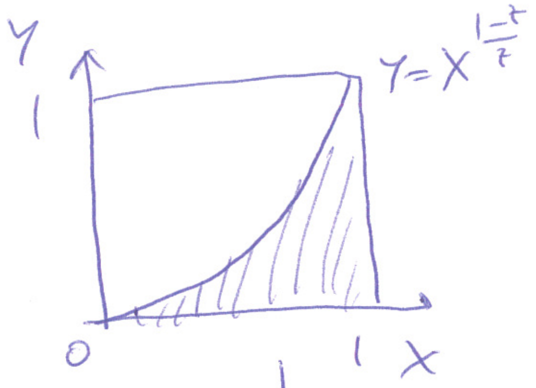
$$= P(\lg X > z \lg X + z \lg Y)$$

$$= P\left(\lg Y < \frac{1-z}{z} \lg X\right)$$

$1-z > 0$ e $z > 0$ $\Rightarrow \frac{1-z}{z} > 0$

$$= P\left(Y < e^{\frac{1-z}{z} \lg X}\right)$$

$$= P\left(Y < X^{\frac{1-z}{z}}\right)$$



per $\frac{1-z}{z} > 1$

$z < \frac{1}{2}$

(e analog. per $z > \frac{1}{2}$)

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{1-z}{z}}} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[x^{\frac{1-z}{z}}\right] = \left.\frac{x^{\frac{1}{z}}}{\frac{1}{z}}\right]_0^1 = z$$

$\Rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ z & 0 < z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} \Rightarrow Z \sim \mathrm{Unif}(0,1)$

ES. 3 $\quad X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ indip.

$$Z_n = \frac{X^n}{Y^n} \in (0, +\infty) \text{ p.c.}$$

$z > 0$

$$F_{Z_n}(z) = P\left(\frac{X^n}{Y^n} < z\right) = P\left(Y^n > \frac{1}{z} X^n\right)$$

$$= P\left(Y > \frac{1}{z^{1/n}} X\right) =$$

$$\lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \left(\int_{\frac{1}{z^{1/n}} x}^{+\infty} e^{-\lambda y} \, dy \right) dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \left[-e^{-\lambda y} \right]_{\frac{x}{z^{1/n}}}^{+\infty} dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x - \lambda \frac{x}{z^{1/n}}} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \frac{\lambda}{z^{1/n}}} \left[-e^{-\lambda\left(1 + \frac{1}{z^{1/n}}\right) x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{z^{1/n}}} = \frac{z^{1/n}}{z^{1/n} + 1}$$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \dfrac{z^{1/n}}{z^{1/n}+1} & z > 0 \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \dfrac{1}{2} & z > 0 \end{cases}$$

non è una f.r.

quindi $Z_n \overset{d}{\not\to}$

e perciò non converge neanche i.p. e p.c.

(5)

$$W_n = \frac{X^{1/n}}{Y^{1/n}} \in (0,+\infty) \text{ p.c.}$$

$$F_{W_n}(w) = P\left(Y^{1/n} > \frac{1}{w} X^{1/n}\right)$$

$$= P\left(Y > \frac{1}{w^n} X\right)$$

analogam. a prima

$$= \dots = \frac{w^n}{w^n+1} \quad \text{per } w>0$$

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ \dfrac{w^n}{w^n+1} & w>0 \end{cases} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ 0 & 0<w\le 1 \\ 1 & w>1 \end{cases}$$

quindi $\quad W_n \xrightarrow{d} W \overset{\text{p.c.}}{=} 1$

e $\quad W_n \xrightarrow{P} 1$

Per la conv. p.c. verifico che $P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} |W_m-1|>\varepsilon\right) \to 0$

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} |W_m-1|>\varepsilon\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disug. di Boole}}}{\le} \sum_{m=n}^{\infty} P(|W_m-1|>\varepsilon) =$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} P(W_m > 1+\varepsilon) + \sum_{m=n}^{\infty} P(W_m < 1-\varepsilon)$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty}\left(1 - \frac{(1+\varepsilon)^m}{1+(1+\varepsilon)^m}\right) + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^m}{1+(1-\varepsilon)^m}$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{1+(1+\varepsilon)^m} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^m}{1+(1-\varepsilon)^m} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

poiché resto n-esimo di serie $< \infty$. $\quad \Longrightarrow \quad W_m \xrightarrow{\text{p.c.}} 1$

(1)

Cognome:.. Nome:..
Matricola:..

BARRARE I QUADRATINI SEGUENTI:
Data orale: ☐ 19 gennaio 2017.........☐ 16 febbraio 2017

☐ ESAME COMPLETO (tre ore)
☐ RECUPERO I ESONERO (svolgere esercizi 1 e 2 in due ore)
☐ RECUPERO II ESONERO (svolgere esercizi 2 e 3 in due ore)

Prof. Beghin
17-1-2017
COMPITO B

Esercizio 1

Per un esame Marco deve studiare un numero aleatorio N di libri e tale v.a. assume valori 1 e 2 con probabilità 3/10 e 7/10. Il libro i-esimo ha un numero di pagine aleatorio X_i. La v.a. X_i è indipendente da N e assume valore 20 o 30 con uguale probabilità. Si calcoli

i) la distribuzione di probabilità della v.a. Y che corrisponde al numero totale di pagine che deve studiare.

ii) il valor medio di Y.

iii) la probabilità che il primo libro da studiare abbia 20 pagine, sapendo che il numero totale di pagine è pari a 50. Si interpreti il risultato.

Esercizio 2

Siano X e Y v.a. indipendenti ed entrambe uniformi in $(0,1)$. Si calcoli la distribuzione della seguente v.a.

$$Z = \frac{\log X}{\log Y}$$

Esercizio 3

Siano X e Y v.a. indipendenti, con densità

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z+1}, & z \geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

. Si studi la convergenza in distribuzione, probabilità e quasi certa delle successioni:

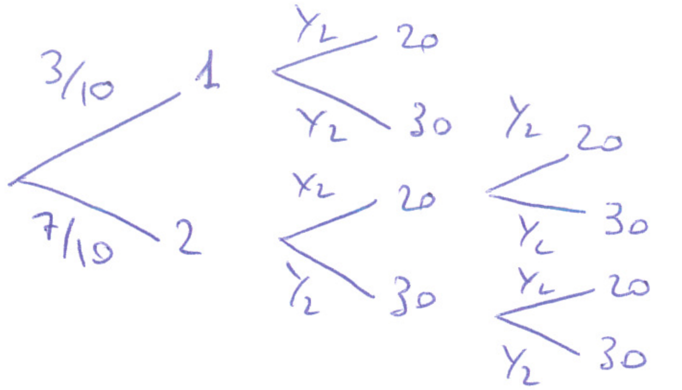
$$Z_n = \frac{(X-1)^n}{(Y-1)^n} \qquad \text{e} \qquad W_n = \frac{(X-1)^{1/n}}{(Y-1)^{1/n}}$$

SOLUZIONI

Es. 1

$$N = \begin{cases} 1 & 3/10 \\ 2 & 7/10 \end{cases} \qquad X_i = \begin{cases} 20 & 1/2 \\ 30 & 1/2 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X_1 & \text{se } N=1 \\ X_1 + X_2 & \text{se } N=2 \end{cases}$$



$$Y \in \underbrace{\{20, 30, 40, 50, 60\}}_{S_Y} \text{ p.c.}$$

i) $P(Y=20) = P(Y=30) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$

$P(Y=40) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{40}$

$P(Y=50) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} = \frac{7}{20}$

$P(Y=60) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{40}$

verifica

$$\sum_{i \in S_Y} P(Y=i) = 1$$

ii) $\mathbb{E}(Y) = \frac{150}{20} + \frac{280}{40} + \frac{350}{20} + \frac{420}{40} = \frac{1700}{40} = 42,5$

iii) $$P(X_1 = 20 \mid Y=50) = \frac{P(X_1=20, Y=50, N=2)}{P(Y=50, N=2)}$$

$$= \frac{P(X_1=20, X_2=30 \mid N=2)\, \cancel{P(N=2)}}{P(Y=50 \mid N=2)\, \cancel{P(N=2)}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Infatti x la somma è 50, $(X_1=20)$ e $(X_2=30)$ sono ancora equiprobabili e $(X_1=20)$ è indipendente da $(N=2)$

Es. 2

3

$X, Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ indip.

$$Z = \frac{\lg X}{\lg Y}$$

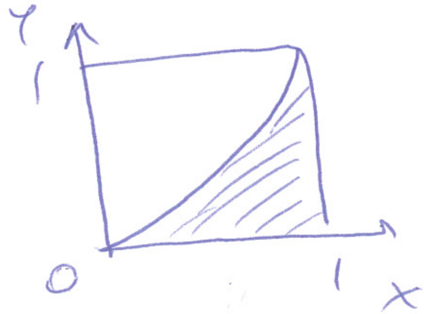
$\lg X, \lg Y \leq 0$ poiché $X, Y \in (0,1)$

$Z \in (0,+\infty)$ p.c.

$z>0$

$$F_Z(z) = P\left(\frac{\lg X}{\lg Y} < z\right) = P\left(\lg Y \leq \frac{1}{z}\lg X\right)$$

$$= P\left(Y \leq e^{\frac{1}{z}\lg X}\right) = P\left(Y \leq X^{1/z}\right)$$



$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^{1/z}} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \cdot x^{1/z} = \left[\frac{x^{\frac{1}{z}+1}}{\frac{1}{z}+1}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{z}{z+1}$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{z}{z+1} & z > 0 \end{cases}$$

verifica per $z=0$ $\quad 0 = F_Z(0^+) = 0$

$z \to +\infty$ $\quad \lim_{z\to+\infty} F_Z(z) = \lim_{z\to+\infty} \frac{z}{z+1} = 1$

Es. 3

X, Y indip. con densità

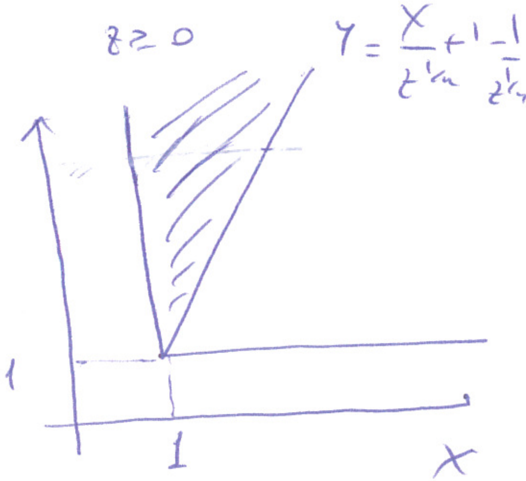
$$f_X(z) = f_Y(z) = \begin{cases} e^{+1-z} & z \geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$Z_n = \frac{(X-1)^n}{(Y-1)^n} \in (0, +\infty) \quad \text{p.c.}$$

$$F_{Z_n}(z) = P\left((X-1)^n < z(Y-1)^n\right)$$

$$= P\left(Y-1 > \frac{1}{z^{1/n}}(X-1)\right)$$

$$= P\left(Y > \frac{1}{z^{1/n}}X + 1 - \frac{1}{z^{1/n}}\right)$$



$$= e^2 \int_1^{+\infty} dx\, e^{-x} \int_{\frac{1}{z^{1/n}}x + \left(1 - \frac{1}{z^{1/n}}\right)}^{+\infty} dy\, e^{-y} =$$

$$= e^2 \int_1^{+\infty} dx\, e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_{\frac{x}{z^{1/n}} + \left(1 - \frac{1}{z^{1/n}}\right)}^{+\infty}$$

$$= e^{\cancel{2}\,1} \int_1^{+\infty} dx\, e^{-x}\, e^{-\frac{x}{z^{1/n}} - \cancel{1} + \frac{1}{z^{1/n}}}$$

$$= e^{1 + \frac{1}{z^{1/n}}} \int_1^{+\infty} dx\, e^{-x\left(1 + \frac{1}{z^{1/n}}\right)}$$

$$= e^{1 + \frac{1}{z^{1/n}}} \left[- \frac{e^{-x\left(1 + \frac{1}{z^{1/n}}\right)}}{1 + \frac{1}{z^{1/n}}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1 + \frac{1}{z^{1/n}}} = \frac{z^{1/n}}{z^{1/n} + 1}$$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 1 \\ \dfrac{z^{1/n}}{z^{1/n}+1} & z > 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 & z \le 1 \\ \dfrac{1}{2} & z > 1 \end{cases}$$ 5

$\to$ non è una f.r.

quindi $Z_n \not\xrightarrow{d}$ e quindi non conv. in pr. e p.c.

$$W_n = \frac{(X-1)^{1/n}}{(Y-1)^{1/n}} \in (0,+\infty) \text{ p.c.}$$

$$F_{W_n}(w) = P\left((Y-1)^{1/n} > \frac{1}{w}(X-1)^{1/n}\right)$$

$$= P\left(Y-1 > \frac{1}{w^n}(X-1)\right) = P\left(Y > \frac{1}{w^n}X + 1 - \frac{1}{w^n}\right)$$

analog. sopra

$$= \dots = \frac{w^n}{w^n+1} \quad \text{per } w > 0$$

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ \dfrac{w^n}{w^n+1} & w > 0 \end{cases} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ 0 & 0 < w \le 1 \\ 1 & w > 1 \end{cases}$$

$$W_n \underset{p}{\xrightarrow{d}} W \overset{p.c.}{=} 1$$

per la conv. p.c. verifico che $P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} |W_m - 1| > \varepsilon\right) \to 0$

(vedi compito A p. 5)

$$W_n \xrightarrow{p.c.} 1$$