Cognome:.. Nome:..
Matricola:..

Data orale: ☐ 19 gennaio 2017.........☐ 16 febbraio 2017

Prof. Beghin
13-1-2017
II esonero

Esercizio 1

Siano X e Y due v.a. indipendenti ed identicamente distribuite. Si calcoli la distribuzione della v.a.

$$U = \left| \frac{X+Y}{X-Y} \right|$$

i) se X e Y sono uniformi in $(0,1)$

ii) se X e Y hanno densità

$$f_X(z) = f_Y(z) = \begin{cases} 2z & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Esercizio 2

Siano $\{X_k\}_{k \geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro $1/k$.

i) calcolare la distribuzione della v.a.

$$Z_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + ... + \frac{X_n}{n}$$

ii) studiare la convergenza in distribuzione ed in probabilità della successione $\left\{\frac{Z_n}{n}\right\}_{n \geq 1}$ per $n \to \infty$.

Soluzioni

Es. 1

$$Z = \left| \frac{X+Y}{X-Y} \right| \qquad Z \geq 1 \text{ q.c.}$$

i) $X, Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$

$$P(Z<z) = P\left(\frac{X+Y}{X-Y} < z, X>Y\right) + P\left(\frac{X+Y}{Y-X} < z, X \leq Y\right)$$

per $z>1$

$$= P(X+Y < zX - zY, X>Y) + P(X+Y < zY - zX, X \leq Y)$$

$$= P\left(Y < \frac{z-1}{z+1}X, X>Y\right) + P\left(Y > \frac{z+1}{z-1}X, X \leq Y\right)$$

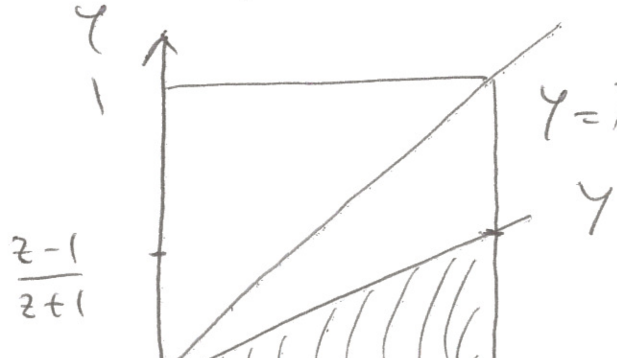
$$= P\left(Y < \frac{z-1}{z+1}X, X>Y\right) + P\left(X < \frac{z-1}{z+1}Y, X \leq Y\right)$$

sono uguali, scambiando X e Y

$$= 2\, P\left(Y < \frac{z-1}{z+1}X, Y<X\right) = \frac{2}{2}\,\frac{z-1}{z+1}$$

<1 C

→ area Triangolo



$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ \frac{z-1}{z+1} & z>1 \end{cases}$$

ii) $f_X(t) = f_Y(t) = \begin{cases} 2t & 0<z<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$P(Z<z) = \ldots = 2\, P\left(Y < \frac{z-1}{z+1} X\right)$$

$$= 8 \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{z-1}{z+1}x} xy \, dy \right) dx$$

$$= 4 \int_0^1 x \left[y^2 \right]_0^{\frac{z-1}{z+1}x} dx$$

$$= 4 \int_0^1 x^3 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 dx$$

$$= \left[x^4 \right]_0^1 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 & z > 1 \end{cases}$$

ES. 2

i) $X_k \sim Exp\left(\frac{1}{k}\right)$

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$$

$$M_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}\left(\frac{t}{k}\right)$$ per l'indipendenza e la proprietà moltiplicativa delle f.c.

$$H_{X_k}(u) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{k}} e^{iux} \, dx$$

$$= \frac{\frac{1}{k}}{iu - \frac{1}{k}} e^{(iu - \frac{1}{k})x} \Big]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1/k}{1/k - iu}$$

quindi per $u = \frac{t}{k}$ $\quad H_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k} - \frac{it}{k}} = \left(\frac{1}{1-it}\right)^n$

$\Longrightarrow Z_n \sim \text{Gamma}(1, n)$

ii) $H_{\frac{Z_n}{n}}(t) = H_{Z_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\frac{1}{1 - i\frac{t}{n}}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{it} = H_1(t)$

$\Longrightarrow \quad \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[P]{d} 1$