Cognome:.. Nome:..
N. matricola:..

Probabilità
Prof. L.Beghin
I esonero

10-11-2016

15

Esercizio n.1

Un'urna contiene $n \geq 1$ palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute senza reimmissione. Introduciamo la variabile aleatoria X uguale al numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa. Si calcolino:

i) la distribuzione di probabilità di X 10

ii) il $\mathbb{E}X$ 5

Si ricorda la formula seguente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

15

Esercizio n.2

Sia X una v.a. con la seguente funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} -\log(x^k), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases},$$

per $k \in \mathbb{R}$. Si calcolino:

i) il valore della costante k; 6

ii) la distribuzione ed i momenti di ordine r di 5 4

$$Y = -\log(X).$$

1) $X =$ "n° bianche prima della I rossa"

a) $P(X=k) = P(\text{prime } k \text{ bianche}, (k+1)\text{-esima rossa})$

$k=0,\dots n$

$$= P((k+1)\text{-esima rossa} \mid \text{prime } k \text{ bianche}) \cdot P(\text{prime } k \text{ bianche})$$

$$= \frac{\binom{n}{k}\cancel{\binom{2}{0}}}{\binom{n+2}{k}} \cdot \frac{2}{n+2-k}$$

$$= \frac{\frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!}}{\frac{(n+2)!}{\cancel{k!}(n+2-k)!}} \cdot \frac{2}{n+2-k}$$

$$= \frac{2\,\cancel{(n+2-k)}(n+1-k)}{(n+2)(n+1)\,\cancel{(n+2-k)}} = \frac{2(n+1-k)}{(n+2)(n+1)}$$

rea $k=1,\dots n$

Verifica:

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)$$

$l = n-k+1$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{l=1}^{n+1} l = \frac{\cancel{2}}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}}{\cancel{2}} = 1$$

1) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \dfrac{2(n+1-k)}{(n+1)(n+2)}$ 2

$$= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{n+2} \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - \frac{2}{(\cancel{n+1})(n+2)} \cdot \frac{n(\cancel{n+1})(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{6n^2+6n-4n^2-2n}{6(n+2)} = \frac{n^2+2n}{3(n+2)}$$

$$= \frac{n(\cancel{n+2})}{3(\cancel{n+2})} = \frac{n}{3}$$

2) $-\int_0^1 \log(x^k)\,dx$

$\log(x^k) = y \quad e^y = x^k$

$x = e^{y/k}$

$\cancel{x = y^{1/k}}$

$\cancel{dx = \frac{1}{k} y^{1/k - 1} dy}$

$dx = \frac{1}{k} e^{y/k} dy$

$$= -\int_{-\infty}^{0} y \frac{e^{y/k}}{k} dy$$

$-y = w \quad y = -w$

$dy = -dw$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(+w)}{k} e^{-w/k} dw$$

$= \mathbb{E}W$ dove $W \sim Exp\left(\frac{1}{k}\right)$

$= k = 1$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} -\lg(x) & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ ③

(i) $Y = g(X) = -\lg(X) \in (0, +\infty)$ q.c.

$F_Y(y) = P(-\lg X < y)$ per $y > 0$

$= P(\lg X > -y)$

$= P(X > e^{-y})$

$= -\displaystyle\int_{e^{-y}}^{1} \lg(x)\, dx$ $\qquad \lg(x) = z$, $x = e^z$, $dx = e^z dz$

(X) alternative

$= -\displaystyle\int_{-y}^{0} z\, e^z\, dz$ $\qquad -z = w$

$= \displaystyle\int_0^y w e^{-w}\, dw =$ per parti

$= \left[-w e^{-w}\right]_0^y + \displaystyle\int_0^y e^{-w}\, dw$

$= -y e^{-y} + \left[-e^{-w}\right]_0^y = -y e^{-y} + 1 - e^{-y}$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-y} - y e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

verifica $0 = F_Y(0) = F_Y(0^+) = 0$

$\lim_{y \to +\infty} F_Y(y) = 1$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \cancel{e^{-y}} - \cancel{e^{-y}} + y e^{-y} \quad y>0$$ (4)

e 0 altrove $\Rightarrow \boxed{Y \sim \text{Gamma}(1,1)}$

$$\mathbb{E} Y^r = \int_0^{+\infty} y^{r+1} e^{-y} \, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y^{r+2-1} e^{-y} \, dy = \Gamma(r+2)$$

$$= (r+1)!$$

---

* ~ alternativa

$$= -\int_{e^{-y}}^{1} \log(x) \, dx$$

$$= -\left[x \log x - x \right]_{e^{-y}}^{1} = 1 + e^{-y}(-y) - e^{-y}$$

$$= 1 - e^{-y} - y e^{-y}$$