Cognome:... Nome:...

n. matricola:..

Probabilità
Prof. L.Beghin

12-9-2016

1) Ho due dadi regolari: il dado A ha sei facce, su cui sono scritti i numeri da 1 a 6, mentre il dado B ha dodici facce, su cui sono scritti i numeri da 1 a 12. Scelgo uno dei due dadi a caso, con la stessa probabilità, e lo lancio per n volte, dove $n \in N$ è un numero fissato.

(i) Qual è la probabilità che tutti i lanci diano come risultato il numero 3?

(ii) Qualè la probabilità che tutti i lanci diano come risultato lo stesso numero?

(iii) Se tutti i lanci danno come risultato il numero 3, qual è la probabilità che il dado scelto sia stato A? Si mostri che tale probabilità (condizionata) è sempre strettamente maggiore di 1/2 e se ne studi il comportamento per $n \to \infty$.

2) Sia X una v.a. di Cauchy, ovvero con densità $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, per $x \in R$.

i) calcolare la distribuzione della v.a. $Y = \arctan X$

ii) studiare la convergenza, per $n \to \infty$, della successione di v.a.

$$Z_n = \frac{\max(X_1, ..., X_n)}{n}.$$

dove X_i sono iid con le distribut. delle X

[Suggerimento: si ricordi che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ e che inoltre $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ e $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$]

SOLUZIONI

1) E = "esce n volte 3"

(i) $$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B)$$
$$= P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)$$
$$= \frac{1}{6^n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12^n} \frac{1}{2} = \frac{2^n + 1}{3^n 2^{2n+1}}$$

ii) E_j = "esce n volte j" $\quad j = 1, \dots 12$

$P($stesso numero n volte$) =$

$$= \sum_{j=1}^{6} P(E_j|A)P(A) + \sum_{j=1}^{12} P(E_j|B)P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6^n} + \frac{12}{12^n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6^{n-1}} + \frac{1}{12^{n-1}}\right]$$

iii) $$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6^n}\frac{1}{2}}{\frac{1}{6^n}\frac{1}{2} + \frac{1}{12^n}\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2^n}{2^n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2^n}} > \frac{1}{2}$$

poiché $\frac{1}{2^n} < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n+1} = 1$$

2) $X \sim \text{Cauchy} \Rightarrow X \in (-\infty, +\infty)$ q.c.

$Y = \arctan X \Rightarrow Y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ q.c.

per $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(i) $$P(Y<y) = P(\arctan X < y) = P(X < \tan y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\tan y} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\arctan x\right]_{-\infty}^{\tan y}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[y + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}y + \frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} < y \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & y > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \Longrightarrow Y \sim \text{Unif}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(ii) $M_n = \max(X_1, \dots X_n) \in \mathbb{R}$ p.c.

$Z_n = \dfrac{M_n}{n} \in \mathbb{R}$ p.c

per $z \in \mathbb{R}$

$$F_{Z_n}(z) = P\left(\frac{M_n}{n} < z\right)$$

$$= P\left(M_n < zn\right) =$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < zn)\right)$$

per l'indip. e l'i.i.d.

$$= \left(F_{X_i}(zn)\right)^n$$

Ma $F_X(zn) = \displaystyle\int_{-\infty}^{zn} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\arctan x\right]_{-\infty}^{zn}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan zn + \frac{\pi}{2}\right]$$

Quindi $F_{Z_n}(z) = \dfrac{1}{\pi^n}\left(\arctan zn + \dfrac{\pi}{2}\right)^n$

$$= \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{zn} + \frac{\pi}{2}\right]^n$$

$$= \left[1 - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{zn}\right]^n$$

per lo sviluppo in serie di Taylor

$$\simeq \left[1 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{zn} + \frac{1}{o(n)}\right]^n = \left[\left[1 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{zn} + \frac{1}{o(n)}\right]^{\pi z n}\right]^{\frac{1}{\pi z}}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\frac{1}{\pi z}} = F_Z(z)$$

$z > 0$