Cognome:... Nome:...
Matricola:......................................

DATA ORALE: □...4-7-2016............□...19-7-2016

Probabilità
Prof. L.Beghin

4-7-2016

Esercizio n.1

Due amiche, Alice e Barbara, parlano al telefono. Prima parla Alice per un tempo aleatorio con distribuzione di probabilità uguale al quadrato di una Norrmale di media nulla e varianza pari a 4 minuti. Poi parla Beatrice per un tempo aleatorio avente la stessa distribuzione di quello di Alice e indipendente da quest'ultimo. Dopo di che la conversazione ha termine.

i) Calcolare la densità del tempo in cui parla Alice;

ii) Calcolare la densità della durata complessiva della telefonata;

iii) Sapendo che la chiamata risulta ancora in corso dopo 8 minuti, calcolare la probabilità che la telefonata ne duri almeno altri 4.

iv) Supponendo che Alice e Barbara si sentano per due giorni consecutivi con le stesse modalità e che le durate dei tempi in cui parlano siano indipendenti, calcolare la densità della durata della chiamata più corta tra le due.

Si ricorda che: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e

$$\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Esercizio n.2

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una successione di v.a. con funzione di densità pari a

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{n}{\lambda^n}x^{n-1}\exp\left\{-\frac{x^n}{\lambda^n}\right\} & x > 0 \\ 0 \quad altrove \end{cases}$$

per $\lambda > 0$.

i) Si studi la convergenza in distribuzione della successione $\{X_n\}_{n\geq 0}$ per $n \to \infty$.

ii) Si studi la convergenza in media quadratica della successione $\{X_n\}_{n\geq 0}$ per $n \to \infty$.

SOLUZIONI

X_1 = "Tempo in cui parla Alice"
X_2 = " " " " " Barbara"

ES. 1 $\quad Z \sim N(0,4)$ $\quad$ 1

a) $\quad X_1 = Z^2 \in (0,+\infty)$ p.c

$$P(Z^2<x) = P(-\sqrt{x}<Z<\sqrt{x})$$
$$= \cancel{2}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{z^2}{8}}}{\sqrt{2\pi\cdot \cancel{4}}}\,dz \qquad x\in\mathbb{R}^+$$

$$\boxed{f_{X_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}P(Z^2<x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{e^{-\frac{x}{8}}}{\sqrt{2\pi}} & x>0 \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}}$$

verifica $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} f_{X_1}(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{8}}\,dx$

$$= \frac{\cancel{8}}{\cancel{2}\sqrt{\cancel{2}\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dz}{\cancel{\sqrt{8}}\sqrt{z}}e^{-z}$$

$\frac{x}{8}=z$
$x=8z$
$dx=8\,dz$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

b) $\quad X_1+X_2 \in (0,+\infty)$ p.c

Uso la formula di convoluzione

$$f_{X_1+X_2}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^z \frac{e^{-\frac{x_1}{8}}}{2\sqrt{2x_1}} \cdot \frac{e^{-\frac{z-x_1}{8}}}{2\sqrt{2(z-x_1)}}\, dx_1$$

$x_1 = zw$

$dx_1 = z\,dw$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{zw}{8}}\, e^{-\frac{z(1-w)}{8}}}{\sqrt{\cancel{z}w \cdot \cancel{z}(1-w)}}\, \cancel{z}\, dw$$

$$= \frac{1}{8\cancel{\pi}}\, e^{-\frac{z}{8}}\, \cancel{B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)}\ \cancel{\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}}_{=1}$$

$$= \frac{e^{-\frac{z}{8}}}{8}$$

$$X_1 + X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{8}\right)$$

c) $P(X_1+X_2 > 12 \mid X_1+X_2 > 8) = P(X_1+X_2 > 4)$

per le proprietà di mancanza di memoria dell'esponenziale

$$= 1 - F_{X_1+X_2}(4) = e^{-\frac{4}{8}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

d) Z_i = "durata della chiamata l'i-esimo giorno"

$i = 1, 2$

$W = \min(Z_1, Z_2) \quad \in (0, +\infty)$ p.c.

$$P(W<w) = 1 - P(W>w) \underset{\text{per indipendenza}}{=} 1 - P(Z_1>w)\cdot P(Z_2>w)$$

$$= 1 - e^{-\frac{2w}{8}} = 1 - e^{-\frac{w}{4}}$$

$$\Longrightarrow \quad W \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{4}\right)$$

Es. 2

i) $$F_{X_n}(x) = \int_0^x \frac{n}{\lambda^n} z^{n-1} e^{-\frac{z^n}{\lambda^n}} \, dt$$

$$= \left[-e^{-\frac{z^n}{\lambda^n}} \right]_0^x$$

$$= 1 - e^{-\frac{x^n}{\lambda^n}} \qquad x > 0$$

$$\Longrightarrow \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - \frac{x^n}{\lambda^n} & x > 0 \end{cases} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0 & 0 < x \le \lambda \\ 1 & x > \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & x \le \lambda \\ 1 & x > \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow[p]{d} X \overset{q.c.}{=} \lambda$$

ii) $$\mathbb{E}|X_n - \lambda|^2 = \mathbb{E} X_n^2 + \lambda^2 - 2\lambda \mathbb{E} X_n$$

$$\mathbb{E}X_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{\lambda^n} x^n e^{-\frac{x^n}{\lambda^n}} dx$$

④

$$\frac{x^n}{\lambda^n} = z$$

$$x = \sqrt[n]{z}\,\lambda$$

$$dx = \frac{\lambda}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$$

$$= \cancel{\frac{n}{n}} \lambda \int_0^{+\infty} z^{\cancel{\frac{1}{n}-1}} \cancel{z} e^{-z} dz$$

$$= \lambda \Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$\mathbb{E}X_n^2 = \int_0^{+\infty} \frac{n}{\lambda^n} x^{n+1} e^{-\frac{x^n}{\lambda^n}} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \cancel{\frac{n}{\lambda^n}} \cancel{\lambda^n} z \lambda \sqrt[n]{z} e^{-z} \frac{\lambda}{\cancel{n}} z^{\cancel{\frac{1}{n}-1}} dz = \lambda^2 \int_0^{+\infty} z^{\frac{2}{n}} e^{-z} dz$$

$$= \lambda^2 \Gamma\left(\frac{2}{n}+1\right)$$

$$\mathbb{E}|X_n-\lambda|^2 = \lambda^2 \Gamma\left(\frac{2}{n}+1\right) + \lambda^2 - 2\lambda^2 \Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda^2 \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\Gamma(1)} + \lambda^2 - 2\lambda^2 \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\Gamma(1)} = 0$$

$$X_n \xrightarrow{m.q.} X \overset{P.c.}{=} \lambda$$