Cognome:................... Nome:...

Data orale: □ 9-6-2016.........□ 4-7-2016......□ 19-7-2016

Probabilità (Prof. L.Beghin)
7–6-2016

Esercizio n.1

I componenti prodotti in una fabbrica sono difettosi con probabilità p e funzionanti con probabilità $1-p$, con $p \in (0,1)$, l'uno indipendentemente dall'altro.

Indipendentemente dal loro funzionamento, i componenti vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1-\alpha$, per $\alpha \in (0,1)$, l'uno indipendentemente dall'altro. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri (inclusi quelli non ispezionati) vengono messi in commercio.

a) Calcolare la probabilità che di n componenti prodotti k ne vengano messi in commercio, $k = 0, ..., n$.

b) Sapendo che k di questi n componenti prodotti sono stati messi in commercio, calcolare la probabilità che h di questi siano funzionanti, $h = 0, ..., k$.

Si supponga ora che i componenti messi in commercio siano venduti in scatole contenenti 100 pezzi.

c) Calcolare la probabilità che una scatola fissata contenga ℓ componenti funzionanti, $\ell = 0, ..., 100$.

d) Scegliendo a caso 10 componenti da una scatola fissata, calcolare la probabilità che almeno 9 siano funzionanti.

Esercizio n.2

Siano X e Y v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro $\lambda \geq 0$.

i) Calcolare la distribuzione di probabilità di

$$Z = e^{X+Y}$$

utilizzando uno o più metodi conosciuti.

iii) Sia ora $\lambda = \frac{1}{n}$, si studi la convergenza della successione $\{W_n\}_{n\geq 0}$ definita come

$$W_n = e^{\frac{X+Y}{n}}$$

per $n \to \infty$.

SOLUZIONI

ES. 1

F = "funzionante"

I = "ispezionato"

V = "venduto"

X = "n° componenti venduti"

Y = "n° componenti funzionanti"

a) $P(V) = P(I^c) + P(I \cap F) =$

$$= 1-\alpha + \alpha(1-p) = 1-\alpha p$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k}(1-\alpha p)^k(\alpha p)^{n-k} \qquad k=0,1,\dots n$$

b) $$P(F|V) = \frac{P(F\cap V)}{P(V)} = \frac{\overbrace{P(V|F)}^{=1}P(F)}{P(V)}$$

$$= \frac{1-p}{1-\alpha p}$$

$$P(Y=h|X=k) = \binom{k}{h}\left(\frac{1-p}{1-\alpha p}\right)^h\left(1-\frac{1-p}{1-\alpha p}\right)^{k-h}$$

$$= \binom{k}{h}\left(\frac{1-p}{1-\alpha p}\right)^h\left(\frac{p(1-\alpha)}{1-\alpha p}\right)^{k-h}$$

$h = 0,1,\dots k$

c) $$P(l \text{ funzionanti su } 100) = \binom{100}{l}\left(\frac{1-p}{1-\alpha p}\right)^l\left(\frac{p(1-\alpha)}{1-\alpha p}\right)^{100-l}$$

d) $P\left(\text{almeno 9 funzionanti su 10}\right) = 1 - P\left(\text{funzionanti su 10}\right)$ ②

$$= 10\left(\frac{1-p}{1-\alpha p}\right)^{9}\left(\frac{p(1-\alpha)}{1-\alpha p}\right) + \left(\frac{1-p}{1-\alpha p}\right)^{10}$$

ES. 2 $\quad X, Y \sim Exp(\lambda)$

i) $W = X + Y \sim Gamma(2, \lambda)$

$Z = e^{X+Y} = e^{W} \in (1, +\infty)$ q.c. $\qquad z = g(w) = e^{w}$, $\quad w = h(z) = \log z$

Poiché g è monotona:

$$f_Z(z) = f_W(\log z) \cdot |h'(z)|$$

$$= \frac{e^{-\lambda \log z} (\log z)^{2-1} \cdot \lambda^2}{\underbrace{\Gamma(2)}_{=1}} \cdot \left|\frac{d}{dz} \log z\right|$$

$$= \lambda^2 z^{-\lambda} \log z \cdot \frac{1}{z} = \lambda^2 z^{-\lambda-1} \log z \qquad z \geq 1$$

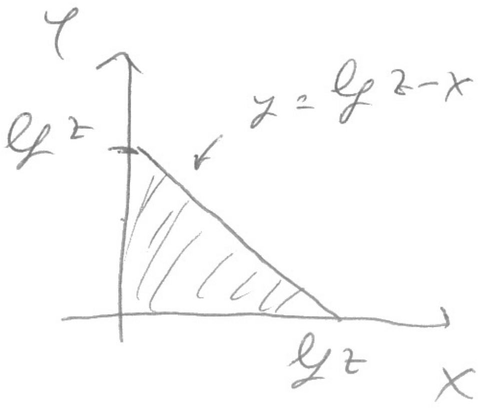
oppure

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P\left(e^{X+Y} < z\right)$$

$$= P(X + Y < \log z)$$

$$= P(Y < \log z - X)$$

$$= \iint_{\{(x,y):\, y < \log z - x\}} \lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda y} \, dx \, dy$$



(3)

$$= \int_0^{\lg t} dx \int_0^{\lg t - x} \lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda y}\, dy$$

$$= \lambda \int_0^{\lg t} dx\, e^{-\lambda x} \left[- e^{-\lambda y} \right]_0^{\lg t - x}$$

$$= \lambda \int_0^{\lg t} e^{-\lambda x}\, dx \; - \lambda \int_0^{\lg t} \cancel{e^{-\lambda x}}\, e^{\lambda x - \lambda \lg t}\, dx$$

$$= \left(- e^{-\lambda x} \right]_0^{\lg t} - \lambda e^{-\lambda \lg t} \lg t$$

$$= 1 - e^{-\lambda \lg t} - \lambda t^{-\lambda} \lg t$$

$$= 1 - t^{-\lambda} (1 + \lambda \lg t)$$

$$\Rightarrow f_t(t) = \lambda t^{-\lambda - 1} (\cancel{1} + \lambda \lg t) \cancel{- \lambda t^{-\lambda - 1}} = \lambda^2 t^{-\lambda - 1} \lg t$$

$$F_t(t) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 1 - t^{-\lambda}(1 + \lambda \lg t) & t > 1 \end{cases}$$

verifice: $t = 1 \quad F_t(1) = 0 = F_t(1^+)$

$t \to +\infty \quad F_t(t) \to 1$

2) $W_n = e^{\frac{X+Y}{n}} = (Z)^{\frac{1}{n}}$ con $\lambda = \frac{1}{n}$

$$P(W_n < w) = P(Z < w^n) = 1 - w^{-n \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{\lg w^n}{n}\right)$$

$$= 1 - w^{-1}\left(1 + \frac{n}{n}\lg w\right)$$

$$= 1 - w^{-1}(1 + \lg w) \qquad \forall n \text{ e per } w > 1$$

$$\Rightarrow \quad F_W(w) = \begin{cases} 0 & w \le 1 \\ 1 - \frac{1}{w}(1 + \lg w) & w > 1 \end{cases}$$

e $W_n \stackrel{d}{=} W$ con f.r. $\uparrow$ $\forall n$

ovvero $W_n \stackrel{d}{=} Z$ con $\lambda = 1$