Cognome:... Nome:...

Data orale: □.1-4-2016.........□. 9-6-2016

Probabilità e laboratorio
prof. Beghin
31-3-2016

Esercizio n.1

Una moneta sbilanciata viene lanciata tante volte. A ciascun lancio la probabilità che esca T è pari a $p \in (0,1)$. Calcolare la probabilità degli eventi:

i) $A =$(la 1° T esce al 5° lancio);

ii) $B =$(la 3° T esce al 8° lancio);

iii) $C = A \cap B$;

iv) $D =$(fra l'11° e il 20° lancio (estremi esclusi) escono esattamente 6 T).

v) Calcolare la probabilità che la 1° T esca al lancio h sapendo che la 2° T esce al lancio $h+k$. Commentare il risultato.

Esercizio n.2

Sia X una v.a. con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ x^{n-1} & 1 < x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}.$$

i) Si ricavi il valiore di a

ii) Si calcoli la funzione di ripartizione di X e tracciarne un grafico.

iii) Si studi la convergenza della successione

$$Y_n = X^n$$

per $n \to \infty$.

SOLUZIONI

ES. 1

$P(T) = p$

i) $P(A) = P(X=5)$ dove $X \sim Geom(p)$

$= q^4 p$

ii) $P(B) = P(X_3 = 8)$ dove $X_3 \sim BinNeg(3,p)$

$= \binom{7}{5} q^5 p^3$

iii) $P(A \cap B) = P(CCCCTTCT) + P(CCCCTCTT)$

$= 2 q^5 p^3$

iv) $P(D) = P(X=6)$ dove $X \sim Bin(8,p)$

$= \binom{8}{6} p^6 q^2$

v) $P(\underbrace{\text{I}^\circ \text{ T al } h\text{-esimo}}_{E} \mid \underbrace{\text{II}^\circ \text{ T al } (h+k)\text{-esimo}}_{F})$

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)} = \frac{p \cdot P(0\,T \text{ in } (k-1) \text{ lanci}) \cdot P(E)}{P(F)}$$

$$= \frac{\cancel{p} \binom{k-1}{0} \cancel{p^0} \cancel{q^{k-1}} \cdot \cancel{q^{h-1}} \cancel{p}}{(h+k-1)\, q^{h+k-2}\, p^2} = \frac{1}{h+k-1}$$

Es. 2

i) $$1 = \int_1^a x^{n-1}\,dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_1^a = \frac{a^n}{n} - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad a^n - 1 = n \qquad a^n = n+1$$

$$a = (n+1)^{1/n}$$

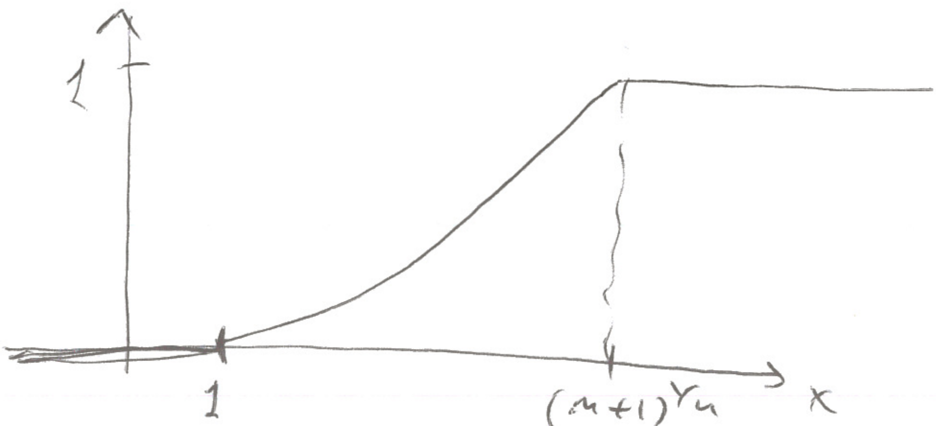
ii) $$F_X(x) = P(X < x) = \int_1^x z^{n-1}\,dz$$

$$= \left.\frac{z^n}{n}\right]_1^x = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{1}{n} & 1 < x \le (n+1)^{1/n} \\ 1 & x > (n+1)^{1/n} \end{cases}$$

in $x = 1 \quad F_X(1) = F_X(1^+) = 0$

$x = (n+1)^{1/n} \quad F_X((n+1)^{1/n}) = F_X\left(((n+1)^{1/n})^+\right) = 1$



(iii) $\quad Y_n \in (1, n+1)$ q.c.

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ ? & 1 < y \leq n+1 \\ 1 & y \geq n+1 \end{cases}$$

~~$y \leq 1$~~

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = P(X^n < y) =$$

$$= P(X < y^{Y_n}) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{y}{n} - \frac{1}{n} & 1 < y \leq n+1 \\ 1 & y > n+1 \end{cases}$$

Per $n \to +\infty \quad F_{Y_n}(y) \longrightarrow 0 \quad \forall\, y < \infty$

quindi Y_n non converge in distribuzione né in altre forme.