1

Cognome:.................. Nome:...

Probabilità e Laboratorio di Probabilità
Prof. L.Beghin
17-2-2016

10

Esercizio n.1

Supponiamo di avere 4 lampadine, ciascuna con una durata di vita aleatoria (in ore) X, con la seguente densità

$$f(x) = \begin{cases} 100/x^2, & x > 100 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Chiamiamo E_i l'evento "la i-esima lampadina deve essere sostituita entro 120 ore", per $i = 1, 2, 3, 4$, e supponiamo che essi siano stocasticamente indipendenti. Calcolare:

i) la probabilità che esattamente 2 lampadine debbano essere sostituite entro 120 ore. 4

ii) la probabilità che, se una lampadina dura più di 200 ore, sia ancora in funzione dopo altre 100. 4

iii) la vita media di una lampadina che dopo 200 ore è ancora accesa. 2

10

Esercizio n.2

Marco attende alla fermata dell'autobus due amici, che viaggiano sulle linee 1 e 2. Quando anche il secondo amico è arrivato, se ne va con loro. Sia X_i la v.a. "attesa dell'amico sull'autobus i-esimo", per $i = 1, 2$. Supponendo che la densità congiunta del vettore aleatorio (X_1, X_2) sia

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 3e^{-(x_1+3x_2)}, & x_1, x_2 > 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

calcolare:

i) la densità di probabilità di $Z =$"istante in cui se ne vanno" 4

ii) il tempo medio di attesa complessiva, ovvero $\mathbb{E}(Z)$. 4

iii) le v.a. X_1 e X_2 sono tra loro indipendenti? 2

10

Esercizio n.3

Sia X una v.a. normale standard e sia $X_n = X/2^n$.

i) studiare la convergenza in probabilità (con opportuni dettagli) della successione $\{X_n\}$ per $n \to +\infty$. 4

ii) Sia $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{S_n\}$ per $n \to +\infty$. 4

iii) Vale anche una forma di convergenza più forte di quella i.d.? 2

SOLUZIONI

1) $p = P(E_i) = P(X_i < 120) = \int_{100}^{120} \frac{100}{x^2} dx$

$= 100 \left[-\frac{1}{x} \right]_{100}^{120} = 100 \left[\frac{1}{100} - \frac{1}{120} \right] = \frac{1}{6} =$ prob. succ.

i) $$P\left(\begin{matrix}2 \text{ succ. in}\\ 4 \text{ more}\end{matrix}\right) = \binom{4}{2} p^2 q^2 = \binom{4}{2} \frac{1}{6^2}\frac{5^2}{6^2}$$ ②

$$= \frac{\cancel{4}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 2}\frac{1}{6^2}\frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{216}$$

ii) $$P(X>300 \mid X>200) = \frac{P(X>300,\ X>200)}{P(X>200)}$$

$$= \frac{P(X>300)}{P(X>200)} = \frac{\int_{300}^{+\infty} \frac{\cancel{100}}{x^2}\,dx}{\int_{200}^{+\infty} \frac{\cancel{100}}{x^2}\,dx} = \frac{\left[-\frac{1}{x}\right]_{300}^{+\infty}}{\left[-\frac{1}{x}\right]_{200}^{+\infty}} = \frac{2}{3}$$

iii) $$\mathbb{E}[X \mid X>200] = \int_{200}^{+\infty} x \cdot P(X\in dx \mid X>200)$$

$$P(X\in dx \mid X>200) = -\frac{d}{dx} P(X>x \mid X>200)$$

for $x>200$

$$= -\frac{d}{dx} \frac{P(X>x,\ X>200)}{P(X>200)}$$

$$= -\frac{d}{dx} \frac{P(X>x)}{\frac{100}{200}} = -\frac{d}{dx} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{\cancel{100}}{x^2}\,dx}{\frac{\cancel{100}}{200}}$$

$$= 200\,\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{x}\right)_x^{+\infty} = -\frac{d}{dx}\left[+\frac{1}{x}\right]\cdot 200$$

$$= \frac{200}{x^2} \quad x>200$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X \mid X>200) = \int_{200}^{+\infty} \cancel{x} \cdot \frac{200}{x^2}\, dx$$ ③

$$= 200 \left[\ln x\right]_{200}^{+\infty} = +\infty$$

2) $Z = \max\{X_1, X_2\}$ infatti $Z = \begin{cases} X_1 & x \; X_1 > X_2 \\ X_2 & x \; X_2 \geq X_1 \end{cases}$

$Z \in (0, +\infty)$ q.c.

i) $$F_Z(z) = P(Z<z) = P(X_1<z, X_2 \leq z)$$

$$= \int_0^z dx_1 \int_0^z dx_2 \; 3e^{-(x_1+3x_2)}$$

$$= \int_0^z dx_1 \left[-e^{-3x_2}\right]_0^z e^{-x_1}$$

$$= (1-e^{-3z}) \left[-e^{-x_1}\right]_0^z = (1-e^{-3z})(1-e^{-z})$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1-e^{-3z}-e^{-z}+e^{-4z} & z>0 \end{cases}$$

infatti per $z \to 0$ $F_Z(z) \to 0$
per $z \to +\infty$ $F_Z(z) \to 1$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 3e^{-3z}+e^{-z}-4e^{-4z} & z \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ii) $$\mathbb{E} Z = \int_0^{+\infty} z\,(3e^{-3z}+e^{-z}-4e^{-4z})\, dz$$

$$= 3\int_0^{+\infty} z e^{-3z}\,dz + \int_0^{+\infty} z e^{-z}\,dz - 4\int_0^{+\infty} z e^{-4z}\,dz$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

ricordando che per $X \sim Exp(\lambda)$ $EX = \frac{1}{\lambda}$

3) $$X_n = \frac{X}{2^n} \sim N\left(0, \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

i) $$P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(|X_n| > \varepsilon)$$

$$= P(|X| > 2^n \varepsilon) \leq \frac{E|X|^2}{2^{2n}\varepsilon^2}$$

per la diseg. di Chebishev

poiché $E(X^2) = V(X) + (EX)^2 = 1 + 0 = 1$

allora $\frac{E(X^2)}{2^{2n}\varepsilon^2} \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi

poiché $P(|X_n| > \varepsilon) \geq 0$ si ha che $\forall \varepsilon > 0$

$P(|X_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ e quindi $X_n \xrightarrow{P} 0$

In realtà converge anche q.c. poiché $\forall \omega$

$$\frac{X(\omega)}{2^n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi $P\left(\omega : \frac{X(\omega)}{2^n} \to 0\right) = 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{q.c.} 0$

ii) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{X}{2^k} = X \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sim N\left(0, \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right)^2\right)$

5

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) - 1$$
$$= 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\Rightarrow S_n \sim N\left(0, \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2\right)$

per $n \to +\infty$ $\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \to 1$ quindi $S_n \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$

iii) Vale anche in questo caso una conv. più forte

poiché $S_n(\omega) = \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) X(\omega)$

quindi $\forall \omega$ $S_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} X(\omega) \sim N(0,1)$

e $S_n \xrightarrow{q.c.} X \sim N(0,1)$