Cognome:..................... Nome:..
Data orale: ....☐ 25-1-2016...........☐ 19–2-2016

☐ $\boxed{\text{SCRITTO COMPLETO}}$
☐ ~~RECUPERO I ESONERO (svolgere gli esercizi n.1 e 2)~~
☐ ~~RECUPERO II ESONERO (svolgere gli esercizi n.2 e 3)~~

Probabilità e Laboratorio di Probabilità
Prof. L.Beghin
19-1-2016

Esercizio n.1 10

Marco e Carlo lanciano a turno una moneta truccata che dà testa (T) con probabilità 1/6. Il primo a lanciare è Marco ed il gioco termina quando uno dei due ottiene T per la prima volta, vincendo così la sfida. Inoltre, se nessuno ottiene T entro i primi n lanci (con $n \geq 2$), il gioco termina senza vincitori. Calcolare

i) la probabilità che il gioco termini senza vincitori 2

ii) la probabilità che Marco vinca (distinguendo i due casi n pari ed n dispari) 8

Esercizio n.2 10

Siano X e Y due v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametri rispettivamente pari a λ_1 e λ_2. Sia inoltre

$$Z = \log(X) - \log(Y).$$

Calcolare

i) la funzione di ripartizione di Z 5

ii) la $P(Z < 0)$ e commentare il risultato 2

iii) il $\mathbb{E}\left[\left(\lambda_1 e^Z + \lambda_2\right)^2 1_{Z<0}\right]$. 3

Esercizio n.3 10

La v.a. X sia distribuita uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = n(X^{1/n} - 1)$$

i) in distribuzione 6

ii) quasi certa 4

Cognome:................... Nome:...
Data orale: ....☐ 25-1-2016..........☐ 19–2-2016

☐ **SCRITTO COMPLETO**
☐ **RECUPERO I ESONERO (svolgere gli esercizi n.1 e 2)**
☐ **RECUPERO II ESONERO (svolgere gli esercizi n.2 e 3)**

Probabilità e Laboratorio di Probabilità
Prof. L.Beghin
19-1-2016

Esercizio n.1

Marco e Carlo lanciano a turno una moneta truccata che dà testa (T) con probabilità 1/6. Il primo a lanciare è Marco ed il gioco termina quando uno dei due ottiene T per la prima volta, vincendo così la sfida. Inoltre, se nessuno ottiene T entro i primi n lanci (con $n \geq 2$), il gioco termina senza vincitori. Calcolare

i) la probabilità che il gioco termini senza vincitori
ii) la probabilità che Marco vinca (distinguendo i due casi n pari ed n dispari)

Esercizio n.2

Siano X e Y due v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametri rispettivamente pari a λ_1 e λ_2. Sia inoltre

$$Z = \log(X) - \log(Y).$$

Calcolare

i) la funzione di ripartizione di Z
ii) la $P(Z < 0)$ e commentare il risultato
iii) il $\mathbb{E}\left[\left(\lambda_1 e^Z + \lambda_2\right)^2 1_{Z<0}\right]$.

Esercizio n.3

La v.a. X sia distribuita uniformemente nell'intervallo $(0,1)$. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = n(X^{1/n} - 1)$$

i) in distribuzione
ii) quasi certa

SOLUZIONI

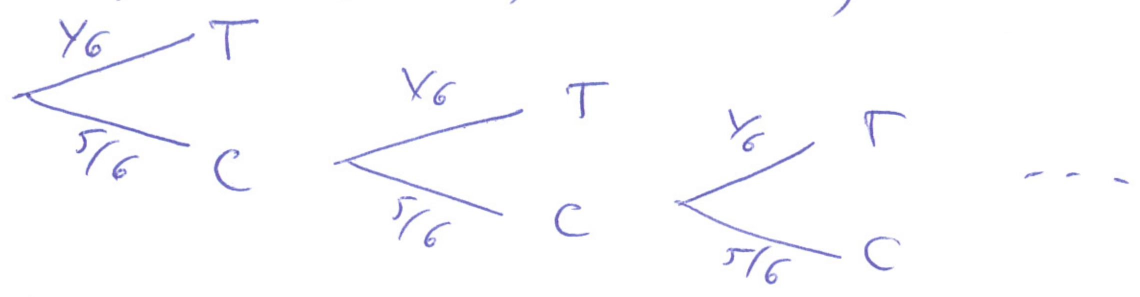
ES. 1

$N =$ "nessun vincitore in n lanci"

i) $P(N) = \left(\frac{5}{6}\right)^n = P($0 successi in n lanci$)$

ii) $M =$ "Marco vince entro n lanci"

I lancio (Marco) II° lancio (Carlo) III° lancio (Marco)



* $\underline{n \text{ pari}}$ $\quad \underline{n = 2k}$

$$P(M) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \dots + \underbrace{\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}}$$

n° totale lanci: $2k-2+1 = 2k-1$
$= n-1$
poiché M vince nei lanci "dispari"

Quindi
$$P(M) = \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2j}$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}}{1-\frac{25}{36}}$$
$$= \frac{6}{11}\cdot\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right]$$

* $\underline{n \text{ dispari}}$ $\quad \underline{n = 2k+1}$

$$P(M) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \dots + \underbrace{\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)^{k}\cdot\frac{1}{6}}$$

n° totale lanci:
$2k+1 = n$

Quindi
$$P(M) = \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{2j}$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2(k+1)}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2k+2}\right]$$
$$= \frac{6}{11}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right]$$

$\left(\text{poiché } 2k+2 = 2\left(\frac{n-1}{2}\right)+2 = n+1\right)$

$$\Rightarrow \quad P(n) = \begin{cases} \frac{6}{11} \cdot \left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] & n \text{ pari} \\ \frac{6}{11}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right] & n \text{ dispari} \end{cases}$$

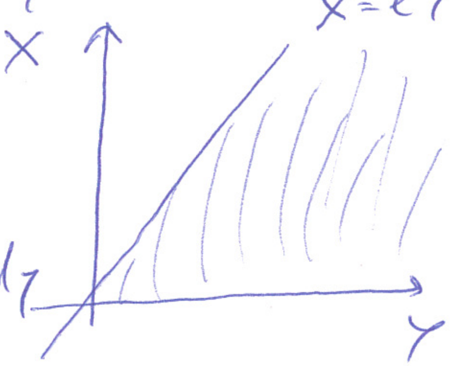
<u>ES. 2</u>

$$X \sim Exp(\lambda_1) \qquad \Rightarrow \quad Z = \log(X) - \log(Y)$$
$$Y \sim Exp(\lambda_2) \qquad Z \in (-\infty, +\infty) \text{ p.c.}$$

i) $F_Z(z) = P(\log(X) - \log(Y) < z)$

$= P\left(\log\left(\frac{X}{Y}\right) < z\right) = P\left(\frac{X}{Y} < e^z\right)$

$= P(X < e^z Y)$



$= \lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y} \int_0^{e^z y} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \, dx \, dy$

$= \lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y} \left[-e^{-\lambda_1 x}\right]_0^{e^z y} dy$

$= \lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y} dy - \lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y - \lambda_1 e^z y} dy$

$= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 e^z} \left[-e^{-(\lambda_2 + \lambda_1 e^z) y}\right]_0^{+\infty}$

$$= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 e^z} = \frac{\lambda_1 e^z}{\lambda_2 + \lambda_1 e^z}$$

$-\infty < z < +\infty$

Verifica per
$z \to +\infty \Rightarrow 1$
$z \to -\infty \Rightarrow 0$

(i) $$P(Z<0) = F_Z(0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

il che significa che tale prob. è tanto maggiore quanto maggiore è il valore di λ_1 (rispetto a λ_2). Poiché nell'esponenziale il parametro è l'inverso del v.m. ciò significa che la $P(Z<0)$ sarà tanto maggiore quanto minore il v.m. di X, come è confermato dalle definizione di $Z = \log(X) - \log(Y)$.

(ii) $$\mathbb{E}\left[(\lambda_1 e^z + \lambda_2)^2 \mathbb{1}_{z<0}\right]$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dt} F_Z(t) = \frac{\lambda_1 e^t(\lambda_2 + \cancel{\lambda_1 e^t}) - \cancel{\lambda_1^2 e^{2t}}}{(\lambda_2 + \lambda_1 e^t)^2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^t}{(\lambda_2 + \lambda_1 e^t)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[(\lambda_1 e^z + \lambda_2)^2 \mathbb{1}_{z<0}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cancel{(\lambda_1 e^z + \lambda_2)^2}}{\cancel{(\lambda_1 e^z + \lambda_2)^2}} \lambda_1 \lambda_2 e^z \mathbb{1}_{z<0}\, dz$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_{-\infty}^{0} e^z\, dz = \lambda_1 \lambda_2$$

Es. 3

$$X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$$

$$Y_n = \frac{X^{1/n}-1}{1/n} \Rightarrow Y_n \in (-n, 0)$$

per $-n<y<0$

i) $F_{Y_n}(y) = P\left(X^{1/n}-1 < \frac{y}{n}\right)$

$$= P\left(X^{1/n} < \frac{y}{n}+1\right) = P\left(X < \left(\frac{y}{n}+1\right)^n\right)$$

$$= \left(\frac{y}{n}+1\right)^n$$

Quindi $F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -n \\ \left(\frac{y}{n}+1\right)^n & -n < y \le 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$

verifica: $y=-n$ $\quad F_{Y_n}(-n) = 0 = F_{Y_n}(-n^+)$

$y=0$ $\quad F_{Y_n}(0) = 1 = F_{Y_n}(0^+)$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \cancel{y \le -\infty} \\ e^y & y \le 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases} = F_Y(y)$$

che coincide con la f.r. di una $Y := -Z$ con $Z \sim Exp(1)$

Infatti $P(-Z < z) = P(Z > -z)$

$$= 1 - \left(1 - e^{-(-z)}\right) = e^z$$

ii) vale anche la conv. p.c. infatti per ω fissato in Ω

$$Y_n(\omega) = \frac{X(\omega)^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log(X(\omega)) = Y(\omega)$$

quindi $Y_n \xrightarrow{P.C.} Y$ dove

$$F_Y(y) = P(\lg(X) < y) = P(X < e^y) = e^y$$

$$-\infty < y < 0$$