

Cognome:..... Nome:.....

Probabilità e Laboratorio - Prof. L.Beghin

I ESONERO

B

10 novembre 2015

Esercizio 1

Per ottenere un documento devo compilare online cinque moduli. Ad ogni modulo posso accedere solo dopo aver compilato il precedente. La compilazione di ogni modulo (indipendentemente dagli altri) richiede 1 minuto con probabilità 0,8 oppure 2 minuti con probabilità 0,2. Per terminare la procedura ho a disposizione 8 minuti, dopo i quali perdo la connessione al sito.

- i) Determinare la probabilità che riesca a completare la procedura.
- ii) Sapendo che sono riuscito a completare la procedura, determinare la probabilità che l'abbia completata esattamente in 5 minuti.
- iii) Calcolare le probabilità dei punti i) e ii) sapendo che con probabilità 1/3 il sito rimane attivo un minuto in più.

15

5
5
3
2

Esercizio 2

Siano con k e a costanti positive e sia X una v.a. assolutamente continua con funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x-1)^{a-1}, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

- i) Calcolare la costante k e la funzione di ripartizione della X .
- ii) Calcolare il $\mathbb{E}(X-1)$
- iii) Ponendo $a = 2$, ricavare la distribuzione della v.a.

15

2+3
3
7

$$Y = \frac{1}{(1-X)^2}$$

SOLUTION 1

ES. 1 :

$F =$ "min. fine procedure"

$P =$ "min. di prob. delle connessioni"

$N =$ "n° pagine compilate "in utero"

$$1) P(F \leq P) = \sum_{j=0}^3 P(N_2 = j)$$

$$= \sum_{j=0}^3 \binom{5}{j} 0,2^j 0,8^{5-j}$$

$$= 1 - \sum_{j=4}^5 \binom{5}{j} 0,2^j 0,8^{5-j}$$

$$= 1 - \frac{5!}{4!} 0,2^4 0,8 - \frac{5!}{5!} 0,2^5$$

$$= 1 - 0,0064 - 0,00032 = 0,99328$$

$$ii) P(F=5 | F \leq P) = \frac{P(F=5 \cap F \leq P)}{P(F \leq P)}$$

$$= \frac{P(F=5)}{P(F \leq P)} = \frac{0,8^5}{0,99328} = \frac{0,327}{0,99328}$$

$$= 0,329$$

$$iii) P(F \leq P) = P(F \leq P | P=9) P(P=9) + P(F \leq P | P=8) P(P=8)$$

$$= \frac{1}{3} (1 - P(F=5)) + \frac{2}{3} \cdot \cancel{0,327} \cdot 0,99328$$

$$= \frac{1}{3} (1 - 0,2^5) + \frac{2}{3} \cdot \cancel{0,327} \cdot 0,99328$$

$$= 0,33 + 0,219 = \cancel{0,552} \quad 0,99541$$

$$0,329$$

$$iv) P(F=5 | F \leq P) = \frac{P(F=5)}{P(F \leq P)} = \frac{0,327}{\cancel{0,552}} = \cancel{0,59} \quad 0,99541$$

ES.2

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad 1 &= k \int_1^2 (x-1) e^{-1} dx \\ &= \frac{k}{e} \left[(x-1)^2 \right]_1^2 = \frac{k}{e} \Rightarrow k=e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= e \int_1^x (z-1) e^{-1} dz \\ &= \frac{e}{e} \left[(z-1)^2 \right]_1^x = (x-1)^2 \quad \text{for } 1 < x < 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ (x-1)^2 & 1 < x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad E(X-1) &= e \int_1^2 (x-1)^2 dx \\ &= \frac{e}{e+1} \left[(x-1)^{e+1} \right]_1^2 = \frac{e}{e+1} \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad e=2 \quad Y = \frac{1}{(1-X)^2} \quad e \in (1, +\infty) \text{ p.o.}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ ? & y > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{for } y > 1 \quad F_Y(y) &= P\left(\frac{1}{(1-X)^2} < y\right) = P\left(\frac{1}{y} < (1-X)^2\right) \\ &= P\left(1-X < \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \\ &= P\left(X > 1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \end{aligned}$$



$$= 1 - F_x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z}} - 1\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{z}$$

$$F_Y(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{z} & z > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & y > 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$