Cognome:............................... Nome:...................................

Probabilità - Prof. L.Beghin

8-9-2015

Esercizio 1

Una cellula dopo ogni ora può scomparire (con probabilità 1/4) oppure sopravvivere senza riprodursi (con probabilità 1/2) oppure scindersi in due cellule (con probabilità 1/4).

Se ho più cellule supponiamo che ciò che avviene ad ognuna di esse sia indipendente da ciò che avviene alle altre. Se all'inizio ho una sola cellula, calcolare la probabilità che:

i) dopo due ore ci sia almeno una cellula;

ii) dopo un'ora ci siano due cellule, sapendo che dopo 2 ore non ce n'è più nessuna.

Esercizio 2

Sia X una v.a. si studi la convergenza della seguente successione

$$Y_n = n(e^{X/n} - 1)$$

per $n \to \infty$, sotto le seguenti ipotesi particolari:

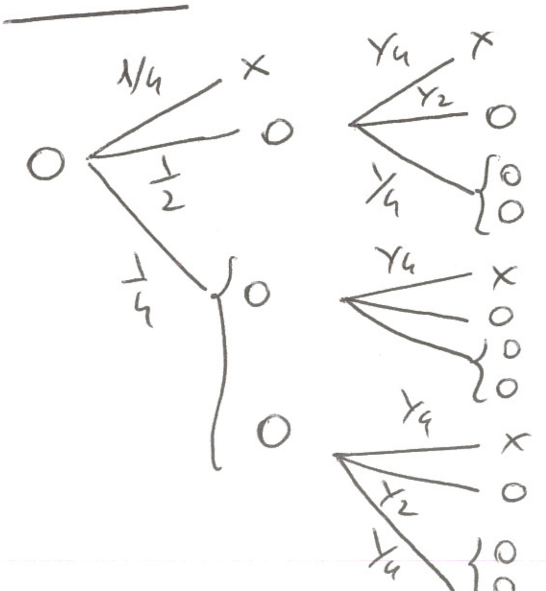
i) X è una v.a. uniforme in $(0, 1)$.

ii) X è una v.a. esponenziale di parametro λ_n, con $\lambda_n = \lambda$, $\lambda_n = n$ o $\lambda_n = 1/n$.

Cosa si può affermare riguardo alla convergenza nel caso generale di una distribuzione qualunque?

SOLUZIONI

ES. 1



(i) $P(\text{1 cell. dopo 2 ore}) =$

$= 1 - P(\text{0 cell. dopo 2 ore})$

$= 1 - \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right\} =$

$= 1 - \frac{16+8+1}{64} = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$

$$(ii)\quad P\left(\begin{matrix}2 \text{ cell.}\\ \text{dopo } 1 \text{ ore}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}0 \text{ cell.}\\ \text{dopo } 2 \text{ ore}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{P\left(\begin{matrix}0 \text{ cell.}\\ \text{dopo } 2 \text{ ore}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}2 \text{ cell.}\\ \text{dopo } 1 \text{ ore}\end{matrix}\right) P\left(\begin{matrix}2 \text{ cell.}\\ \text{dopo } 1 \text{ ore}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}0 \text{ cell.}\\ \text{dopo } 2 \text{ ore}\end{matrix}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{25}{64}} = \frac{1}{25}$$

Es. 2

$$(i)\quad X \sim \text{Unif}(0,1)$$

$$Y_n = n\left(e^{X/n}-1\right) \in \left(0, n\left(e^{1/n}-1\right)\right) \quad \text{q.c. } \forall n$$

$$F_{Y_n}(y) = P\left(n\left(e^{X/n}-1\right) < y\right)$$

$$= P\left(e^{X/n}-1 < \frac{y}{n}\right)$$

$$= P\left(e^{X/n} < \frac{y}{n}+1\right) = P\left(\frac{X}{n} < \ln\left(\frac{y}{n}+1\right)\right)$$

$$= P\left(X < n\ln\left(\frac{y}{n}+1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad = n\ln\left(\frac{y}{n}+1\right) = \ln\left(\frac{y}{n}+1\right)^n$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} \ln e^{y} = y$$

per $y < 1$ poiché
$$n\left(e^{1/n}-1\right) = \frac{e^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

$$\Rightarrow \quad F_{Y_n}(y) \longrightarrow \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Quindi $\quad Y_n \xrightarrow{d} \cancel{Z} \sim \text{Unif}(0,1)$

$Y_n \geq 0$ q.c.

(ii) $\quad F_{Y_n}(y) = P\left(X < n \ln\left(\frac{y}{n}+1\right)\right)$

$$= 1 - e^{-\lambda_n \cdot n \ln\left(\frac{y}{n}+1\right)} \quad \text{per } y > 0$$

Se $\lambda_n = \cancel{\lambda}$ $\quad = 1 - e^{-\lambda \ln\left(\frac{y}{n}+1\right)^n}$

$$= 1 - \left(\frac{y}{n}+1\right)^{-\lambda n}$$

$$\xrightarrow{n \to +\infty} 1 - e^{-\lambda y} \qquad y > 0$$

Quindi $\quad Y_n \xrightarrow{d} Z \sim \text{Exp}(\lambda)$

Se $\lambda_n = \frac{1}{n}$ $\quad F_{Y_n}(y) = 1 - \cancel{e^{-\ln\left(\frac{y}{n}+1\right)}} \left(\frac{y}{n}+1\right)^{-1}$

$$\xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Quindi $\quad Y_n \not\to$ non converge

Se $\lambda_n = n$ $\quad F_{Y_n}(y) = 1 - \left(\frac{y}{n}+1\right)^{-n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \quad$ per $y > 0$

Quindi $\quad F_{Y_n}(y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \overset{q.c.}{=} 0$$

(iii) In generale, se la distribuzione di X non dipende da n, $\quad Y_n \xrightarrow{q.c.} X$.

Infatti $\quad P\left(n\left(e^{X/n} - 1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} X\right) = 1 \quad$ per il limite notevole $\dfrac{e^{X/n}-1}{\cancel{X}} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$