Cognome:................................ Nome:....................................
Data orale:....☐ 2-7-2015..........☐ 21-7-2015

Probabilità - Prof. L.Beghin

1 luglio 2015

Esercizio 1

Date le due v.a. X e Y, tra loro indipendenti ed entrambe con distribuzione esponenziale di parametro λ, si studi la convergenza della seguente successione

$$Z_n = \frac{nX}{X + nY}$$

per $n \to \infty$, in distribuzione e quasi certa. Se indichiamo con Z la v.a. limite si calcoli inoltre

$$E\left[(Z+1)^2 e^{-Z}\right]$$

Esercizio 2

In un torneo di tennis due giocatori, A e B, disputano un incontro su tre set (cioé per vincere l'incontro bisogna vincere due set). Il giocatore A ha probabilità p di vincere ciascuno dei primi due set, indipendentemente l'uno dall'altro; se però si arriva al terzo set, la sua probabilità di vincerlo è p_1.

Calcolare la probabilità che:
(a) vinca A;
(b) si arrivi al terzo set;
(c) A vinca al terzo set;
(d) l'incontro duri tre set, dato che vince A.

SOLUZIONI

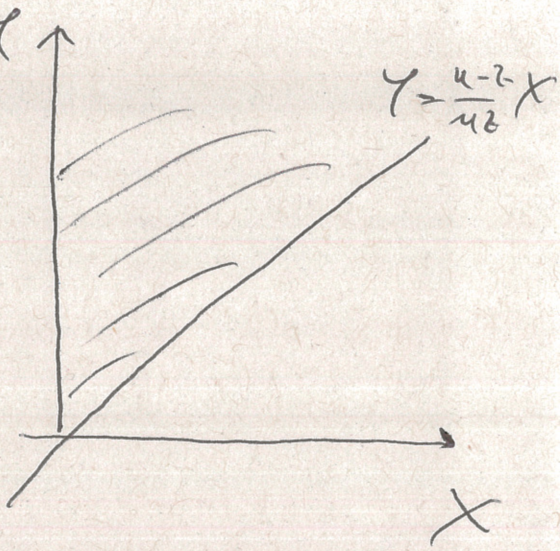
ES. 1

$Z_n \in (0, n)$ q.c.

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ ? & 0 < z \leq n \\ 1 & z > n \end{cases}$$

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n < z) = P\left(\frac{nX}{X+nY} < z\right)$$

$$= P(nX < zX + nzY)$$



$$= P\left(Y > \frac{n-z}{nz} X\right)$$

$\frac{n-z}{nz} > 0$ per $z < n$

$$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} dx \int_{\frac{n-z}{nz}x}^{+\infty} e^{-\lambda x - \lambda y}\, dy$$

$$= \lambda^{\cancel{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \left[-\frac{e^{-\lambda y}}{\cancel{\lambda}} \right]_{\frac{n-z}{nz}x}^{+\infty} dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x - \lambda \frac{n-z}{nz} x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x \left(1 + \frac{n-z}{nz}\right)}\, dx$$

$$= \cancel{\lambda} \left[- \frac{e^{-\lambda \frac{nz+n-z}{nz}}}{\cancel{\lambda} \frac{nz+n-z}{nz}} \right]_0^{+\infty} = \frac{nz}{(n-1)z+n} \quad \text{per } z < n$$

$$\Rightarrow \quad F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{nz}{(n-1)z+n} & 0 < z \leq n \\ 1 & z > n \end{cases}$$

verifica per $z = 0$ $F_{Z_n}(z) = 0$

per $z = n$ $F_{Z_n}(z) = \frac{n^2}{(n-1)n+n} = 1$

per $z \to +\infty$ $F_{Z_n}(z) = 1$

per $n \to +\infty$ $F_{Z_n}(z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{z}{z+1} & z > 0 \end{cases}$

Quindi $Z_n \xrightarrow{d} Z$ con densità

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{\cancel{z}+1-\cancel{z}}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} \qquad z \geq 0$$

Per dimostrare la convergenza q.c. basta considerare che

$$Z_n(\omega) = \frac{n X(\omega)}{X(\omega) + nY(\omega)} = \frac{X_n(\omega)}{\frac{X_n(\omega)}{n} + Y(\omega)} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$$

per ogni $\omega \in \{\omega : X(\omega), Y(\omega) \in \mathbb{R}^+\}$

Quindi $P\left(Z_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}\right) = 1$

e $Z_n \xrightarrow{q.c.} Z = \frac{X}{Y}$

Infatti $Z = \frac{X}{Y}$ ha la distribuzione

Troviamo prima: per $z>0$

$$P(Z<z) = P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = P(X < zY)$$

$$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} dy \int_0^{zy} e^{-\lambda x - \lambda y}\, dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} dy\, e^{-\lambda y} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{zy}$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\, dy - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y(1+z)}\, dy$$

$$= 1 - \left[-\frac{e^{-\lambda y(1+z)}}{1+z}\right]_0^{+\infty} = 1 - \frac{1}{1+z} = \frac{z}{1+z} \qquad z>0$$

$$\mathbb{E}\left[(z+1)^2 e^{-z}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-z}\frac{(z+1)^2}{(z+1)^2}\,dz = 1$$

ES. 2

I = "A vince il I set" $\qquad P(I)=P(II)=p$

II = "A vince il II set" $\qquad P(III)=p_1$

III = " " " III "

1) $P(\text{A vince}) = P(\text{A vince al II} \cup \text{A vince al III})$

$= P(\text{A vince al II}) + P(\text{A vince al III})$

$= p^2 + 2p(1-p)p_1$

2) $P(\text{arrivare al III}) = 2p(1-p)$

3) $P(\text{A vince al III}) = 2p(1-p)\,p_1$

4) $P(\text{incontro dura 3 set} \mid \text{vince A})$

$$= \frac{P(\text{arrivare al III} \cap \text{vince A})}{P(\text{vince A})}$$

$$= \frac{P(\text{A vince al III})}{P(\text{vince A})} = \frac{2\cancel{p}(1-p)p_1}{p^2+2\cancel{p}(1-p)p_1} = \frac{2(1-p)p_1}{p+2(1-p)p_1}$$