Cognome:.................. Nome:...

Probabilità (Prof. L.Beghin)
3-6-2015

Esercizio n.1

In un sacchetto sono presenti i 90 pezzi numerati della tombola.

a) Estraendo tutti i 90 numeri senza reinserimento, qual'è la probabilitá che escano in ordine crescente?

b) Estraendo 10 numeri con reinserimento, qual'è la probabilitá che 6 di questi siano minori o uguali a 50?

c) Estraendo in blocco 10 numeri, qual'è la probabilità che tra questi ci sia il numero 86?

d) Estraendo numeri senza reiserimento, quaĺ'è la probabilitá che il numero 3 esca al terzo tentativo?

Esercizio n.2

Sia (X, Y) una v.a. doppia con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y^2), & x, y \in (0,1) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

i) si ricavi la $P(X > Y)$.

ii) le variabili X e Y sono indipendenti?

iii) si studi la convergenza della successione

$$W_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

dove le v.a. X_j, per $j \geq 1$, sono indipendenti e tutte distribuite come la v.a. X.

SOLUZIONI

Es. 1

N = "n° sulla pallina estratta"

(i) $P(1 \text{ particolare sequenza}) = \frac{1}{P_{90}} = \frac{1}{90!}$

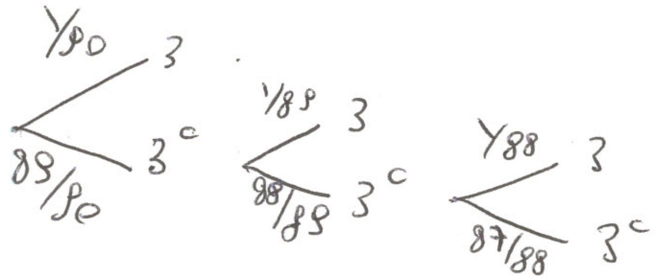
(ii) $P(N \leq 50) = \frac{5}{9} = p$

Binomiale con $n = 10$ e $p = \frac{5}{9}$

$P(6 \text{ succ. in } 10 \text{ prove}) = \binom{10}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^6\left(\frac{4}{9}\right)^4$

(iii) $P(N = 86 \text{ in } 10 \text{ prove}) = \binom{89}{9}\binom{1}{1} \Big/ \binom{90}{10} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

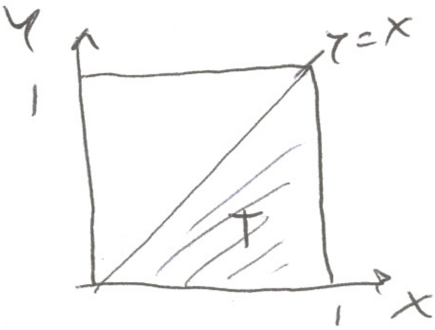
(iv) E_j = "3 esce al telefono j-esimo"



$$P(3 \text{ esce al terzo telefono}) = P(E_1^c E_2^c E_3) =$$

$$= P(E_1^c)\, P(E_2^c | E_1^c)\, P(E_3 | E_1^c E_2^c) =$$

$$= \frac{\cancel{89}}{90} \cdot \frac{\cancel{88}}{\cancel{89}} \cdot \frac{1}{\cancel{88}} = \frac{1}{90}$$



Es. 2

(i) $P(X>Y)$

$$= \iint_{\{(x,y)\in *\}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x k(x+y^2)\,dy$$

Calcolo k

$$1 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\; k(x+y^2) =$$

$$= k\int_0^1 d\cancel{y}x \left.\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + k\int_0^1 y^2\,dy = \frac{k}{2} + k\left.\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{k}{2} + \frac{k}{3} = k\cdot\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow k = 6/5$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X>Y)} = \frac{6}{5}\int_0^1 dx \cdot x^2 + \frac{6}{5}\int_0^1 \left.\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx$$ 3

$$= \frac{\cancel{6}^{2}}{5}\left.\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^1 + \frac{\cancel{6}^{2}}{5}\int_0^1 \frac{x^3}{\cancel{3}}\,dx$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\left.\frac{x^4}{\cancel{4}_2}\right]_0^1 = \frac{5}{10} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(ii) Le variabili non sono indipendenti poiché

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy =$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)\,dy$$

$$= \frac{6x}{5} + \frac{\cancel{6}^{2}}{5}\left.\frac{y^3}{\cancel{3}}\right]_0^1 = \frac{6x}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right) \quad x\in(0,1)$$

mentre $f_Y(y) = \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)\,dx$

$$= \frac{\cancel{6}^{3}}{5}\left.\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^1 + \frac{6}{5}y^2 = \frac{3}{5} + \frac{6y^2}{5} \quad y\in(0,1)$$

e $f_X(x)\cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$

(iii) $W_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ le v.a. X_j sono i.i.d.

con

$$E(X_j) = \int_0^1 \frac{6}{5}x\left(x+\frac{1}{3}\right)dx = \frac{\cancel{6}^{2}}{5}\left.\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^1 + \frac{\cancel{2}^{1}}{5}\left.\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$E(X_j^2) = \int_0^1 \frac{6}{5}x^2\left(x+\frac{1}{3}\right)dx = \frac{\cancel{6}^{3}}{5}\cdot\left.\frac{x^4}{\cancel{4}_2}\right]_0^1 + \frac{\cancel{6}^{2}}{5}\left.\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow V(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}X_i)^2 = \frac{7}{10} - \frac{9}{25} < \infty$$

Valgono le ipotesi delle LDGN quindi

$$W_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X) = \frac{3}{5}$$