Cognome:.................. Nome:.......................................

Probabilità (Prof. L.Beghin)
24-3-2015

Esercizio n.1

Due urne contengono rispettivamente b_1 e b_2 palline bianche e n_1 e n_2 palline nere. Supponiamo di estrarre due palline e di vincere il gioco se entrambe le palline sono bianche. L'estrazione delle due palline avviene secondo una delle due seguenti procedure: a) si sceglie a caso un'urna, si estrae una pallina, la si rimette dentro, si sceglie di nuovo un'urna e si estrae un'altra pallina; b) si sceglie a caso un'urna, si estrae una pallina, la si rimette dentro e, sempre dalla stessa urna, si estrae di nuovo una pallina.

i) Quale dei due procedimenti descritti è più vantaggioso per vincere il gioco?

ii) Supponiamo di ripetere il gioco (sempre con le stesse procedure) fino a che non si ha la prima vittoria. Calcolare la probabilità di dover effettuare n giochi per avere la prima vittoria, separatamente per le due procedure.

Esercizio n.2

Sia X una v.a. esponenziale di parametro 1 e sia Y_n una v.a. da essa indipendente ed esponenziale di parametro $n \geq 0$.

i) Calcolare la distribuzione di probabilità di

$$Z_n = \frac{1}{X + Y_n}$$

utilizzando uno o più metodi conosciuti.

ii) Studiare la convergenza, per $n \to \infty$, della successione $\{Z_n\}_{n \geq 0}$

iii) Studiare la convergenza in probabilità ed in distribuzione (separatamente) della stessa successione, per $n \to 0$.

SOLUZIONI 2

I) $B =$ "esce pallina bianca"

$U_1 =$ "estraggo dall'urna 1"

$U_2 =$ " " " 2

chiaramente $P_1 = P(B|U_1) = \dfrac{b_1}{b_1 + n_1}$

$P_2 = P(B|U_2) = \dfrac{b_2}{b_2 + n_2}$

$V_a =$ "vinco il gioco con la procedura a"

V_b = "vinco il gioco con la procedura b"

i) $$P(V_a) = P(BB \text{ con proc. a})$$
$$= P(BB \cap [(U_1U_1) \cup (U_1U_2) \cup (U_2U_1) \cup (U_2U_2)]$$
$$= P[(BB|U_1U_1)P(U_1U_1) + P(BB|U_1U_2)P(U_1U_2)$$
$$+ P(BB|U_2U_1)P(U_2U_1) + P(BB|U_2U_2)P(U_2U_2)$$
$$= \frac{1}{4}\left[p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2\right] = \frac{1}{4}[p_1+p_2]^2$$

$$P(V_b) = P(BB \text{ con proc. } b)$$
$$= P(BB \cap (U_1U_1) \cup (U_2U_2)]$$
$$= P(BB|U_1U_1)P(U_1U_1) + P(BB|U_2U_2)P(U_2U_2)$$
$$= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(p_1+p_2)^2 - \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{4}p_2^2 + \frac{1}{2}p_1p_2 - \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 =$$
$$= -\frac{1}{4}p_1^2 - \frac{1}{4}p_2^2 + \frac{1}{2}p_1p_2$$
$$= \frac{1}{4}\left[-p_1^2 - p_2^2 + 2p_1p_2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[-(p_1-p_2)^2\right] \leq 0$$

Quindi, conviene sempre la strategia b a meno che non sia $p_1 = p_2$ (ovvero $b_1 = b_2$ e $n_1 = n_2$) nel qual caso è indifferente

ii) Con la procedura a:

$$P(\underbrace{V_a^c \cdots V_a^c}_{n-1 \text{ volte}} V_a) = \frac{1}{4}(p_1+p_2)^2\left[1-\frac{1}{4}(p_1+p_2)^2\right]^{n-1}$$

mentre con la procedura b:

$$P(V_b^c \cdots V_b^c V_b) = \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)\left[1-\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)\right]^{n-1}$$

per $n=1,2,\ldots$

II) $X \sim Exp(1)$ $\quad Y_n \sim Exp(n)$ indip.

$$Z_n = \frac{1}{X+Y_n} \in (0,+\infty) \text{ p.c.}$$

(i) Posso calcolare la distr. di $W_n = X+Y_n$ con la formula di convoluz.

$$f_{W_n}(w) = \int_0^w e^{-x} n e^{-(w-x)n}\,dx$$

$$= n e^{-wn}\int_0^w e^{+x(n-1)}\,dx$$

$$= \frac{n e^{-wn}}{n-1} e^{x(n-1)}\Big]_0^w = e^{\cancel{-wn}+w(\cancel{n}-1)}\frac{n}{n-1} - \frac{n}{n-1}e^{-wn} =$$

$$= \frac{n}{n-1}\left[e^{-w}-e^{-wn}\right] \qquad w \geq 0$$

e poi calcolare la distrib. di $Z_n = \frac{1}{W_n}$

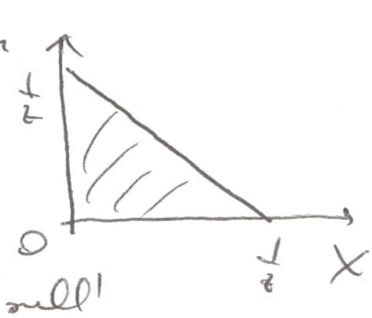
$$P(Z_n < z) = P\left(W_n > \frac{1}{z}\right) = \int_{\frac{1}{z}}^{+\infty} \frac{n}{n-1}\left[e^{-w} - e^{-wn}\right] dw$$

$$= \frac{n}{n-1}\left[-e^{-w}\right]_{\frac{1}{z}}^{+\infty} - \frac{n}{n-1}\left[-\frac{e^{-wn}}{n}\right]_{\frac{1}{z}}^{+\infty}$$

$$= \frac{n}{n-1} e^{-\frac{1}{z}} - \frac{1}{n-1} e^{-\frac{n}{z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{n}{n-1} e^{-\frac{1}{z}} - \frac{1}{n-1} e^{-\frac{n}{z}} & z > 0 \end{cases}}$$

<u>Oppure</u> si poteva calcolare direttamente



$$P(Z_n < z) = P\left(X + Y_n > \frac{1}{z}\right)$$

$$= P\left(Y_n > \frac{1}{z} - X\right)$$

$$= 1 - P\left(Y_n < \frac{1}{z} - X\right)$$

integrale sull' area tratteggiata

$$= 1 - \int_0^{\frac{1}{z}} dx \int_0^{\frac{1}{z} - x} dy \; e^{-x} n e^{-yn}$$

$$= 1 - \int_0^{1/z} dx \; e^{-x}\left[-e^{-yn}\right]_0^{1/z - x}$$

$$= 1 - \int_0^{1/z} dx \left[e^{-x} - e^{-x - n\left(\frac{1}{z} - x\right)}\right]$$

$$= 1 - \left[-e^{-x}\right]_0^{1/z} + e^{-\frac{n}{z}} \int_0^{1/z} e^{+x(n-1)} dx$$

$$= e^{-\frac{1}{z}} + \frac{e^{-\frac{n}{z}}}{n-1}\left(-1 + e^{\frac{1}{z}(n-1)}\right) = e^{-\frac{1}{z}} + \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{n-1} - \frac{e^{-\frac{n}{z}}}{n-1}$$

$$= \frac{n}{n-1} e^{-\frac{1}{z}} - \frac{1}{n-1} e^{-n/z} \qquad z > 0$$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{z}} & z \geq 0 \end{cases}$

$\boxed{Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} Z \text{ con } f.r.}$

(iii) $\lim_{n\to 0} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 & z \geq 0 \end{cases}$

$\boxed{Z_n \xrightarrow[p]{d} Z = 0 \text{ p.c}}$

Inoltre $P(|Z_n - 0| < \varepsilon)$

$= P(Z_n \leq \varepsilon)$

$= F_{Z_n}(\varepsilon)$ $\qquad \forall \varepsilon > 0$

$= \frac{n}{n-1} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \frac{1}{n-1} e^{-\frac{n}{\varepsilon}} \to 1$