Cognome:.. Nome:..

BARRARE I QUADRATINI SEGUENTI:
Data orale: □ 22 gennaio 2015.........□ 19 febbraio 2015

□ ESAME COMPLETO (tre ore)
□ RECUPERO I ESONERO (svolgere esercizi 1 e 2 in due ore)
□ RECUPERO II ESONERO (svolgere esercizi 2 e 3 in due ore)

Prof. Beghin
20-1-2015

Esercizio 1

L'urna U_1 contiene 1 pallina bianca e $2n-1$ nere, l'urna U_2 contiene $2n-1$ palline bianche e 1 nera, l'urna U_3 contiene n palline bianche e n palline nere. Si trasferisce una pallina, scelta a caso, dall'urna U_1 all'urna U_2, quindi una pallina dall'urna U_2 all'urna U_3, e infine una pallina dall'urna U_3 all'urna U_1..Calcolare la probabilità:

i) che non cambi la composizione di nessuna urna;
ii) che cambi la composizione di due urne soltanto;
iii) che cambi la composizione di una sola urna;
iv) di avere solo un'urna con palline dello stesso colore;
v) di avere due urne con palline dello stesso colore.

Esercizio 2

Siano X e Y due v.a. indipendenti e sia X uniforme in $(0,1)$ mentre Y è una v.a. esponenziale di parametro 1. Definiamo

$$Z = \begin{cases} X, & \text{se } Y < 1 \\ -X, & \text{se } Y > 1 \end{cases}.$$

i) Spiegare perchè si può escludere il caso $Y = 1$
ii) Calcolare la distribuzione della v.a. Z
iii) Calcolare il $\mathbb{E}Z$.

Esercizio 3

Siano $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti e con la seguente funzione di ripartizione:

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^n, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{X_1 + X_n\}_{n\geq 1}$, per $n \to \infty$.

SOLUZIONI ES. 1

$$\begin{tikzcd}
\underset{2n}{U_1} \begin{cases} 1 & B \\ 2n-1 & N \end{cases} \arrow[rr, "1"] & & \underset{2n}{U_2} \begin{cases} 2n-1 & B \\ 1 & N \end{cases} \arrow[dl, "1"] \\
& \underset{2n}{U_3} \begin{cases} n & B \\ n & N \end{cases} \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

(i) $P(\text{comp. invariate}) = P(A)$

$$= P(A \mid B \text{ da } U_1)\, P(B \text{ da } U_1) + P(A \mid N \text{ da } U_2)\, P(N \text{ da } U_2)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2n}} \cdot \frac{\cancel{2n}}{2n+1}\, \frac{n+1}{2n+1} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{2n+1}$$

$$= \frac{2n^2+2n+(2n-1)(2n+2)}{2n(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{3n^2+2n-1}{n(2n+1)^2} = \frac{(3n-1)(n+1)}{n(2n+1)^2}$$

(ii) $1 - P(A) = 1 - \dfrac{3n^2+3n-n-1}{n(2n+1)^2}$

$$= \frac{n(4n^2+4n+1) - 3n^2 - 2n + 1}{n(2n+1)^2}$$

$$= \frac{4n^3+n^2-n+1}{n(2n+1)^2}$$

(iii) 0 poiché l'evento è impossibile

(iv) $P(\text{solo } U_1 \text{ stesso colore}) + P(\text{solo } U_2 \text{ stesso colore})$

$$= P(U_1 \xrightarrow{B} U_2,\ U_2 \xrightarrow{B} U_3,\ U_3 \xrightarrow{N} U_1) +$$

$$+ P(U_1 \xrightarrow{B} U_2,\ U_2 \xrightarrow{N} U_3,\ U_3 \xrightarrow{B} U_1)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2n}} \cdot \frac{\cancel{2n}}{2n+1} \cdot \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{\cancel{2n}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\cancel{n}}{2n+1}$$

$$= \frac{\cancel{2n+1}}{2(2n+1)^2} = \frac{1}{2(2n+1)}$$

(v) $P(U_1 \text{ stesso colore},\ U_2 \text{ stesso colore})$

$$= P(U_1 \xrightarrow{B} U_2,\ U_2 \xrightarrow{N} U_3,\ U_3 \xrightarrow{N} U_1)$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n+1}{2n(2n+1)^2}$$