Cognome:.................. Nome:.......................................
Data esame: ☐ 12-11-2014......☐ gennaio 2015

Probabilità - Prof. Beghin
App. Straordinario - 11-11-2014

Esercizio n.1

Consideriamo un'urna con 3 palline bianche, 3 nere e 3 rosse. Si estraggono senza ripetizione 3 palline e poi, dalle 3 estratte, se ne sceglie 1 che si mette in una scatola.

i) Calcolare la distribuzione di probabilità del numero di palline nere estratte alla prima estrazione e il suo valore atteso.

ii) Calcolare la probabilità che la pallina nella scatola sia nera

iii) Calcolare la probabilità che, se nella scatola c'è una pallina nera, alla prima estrazione fosse stata scelta una sola pallina nera..

Esercizio n.2

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti distribuite come esponenziali di parametro $\frac{1}{3^n}$. Sia inoltre

$$Z_n = \min\{X_1, ..., X_n\}.$$

i) Studiare la convergenza di $\{X_n\}_{n\geq 1}$ per $n \to \infty$.
ii) Studiare la convergenza di $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ per $n \to \infty$.

SOLUZIONI

ES. 1

X = "n° palline nere alla I° estraz."

i) $P(X=0) = \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{20}{84}$ $\qquad P(X=2) = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{3}{2}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{18}{84}$

$P(X=1) = \dfrac{\binom{6}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{45}{84}$ $\qquad P(X=3) = \dfrac{\binom{3}{3}\binom{6}{0}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{1}{84}$

$\mathbb{E}X = \dfrac{45}{84} + \dfrac{36}{84} + \dfrac{3}{84} = 1$

$N =$ "palline nelle scatole è nero"

(ii) $P(N) =$

$$= P\left(N, \bigcup_{j=1}^{3} (X=j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} P(N \mid X=j)\, P(X=j)$$

$$= \frac{45}{84} \cdot \frac{1}{3} + \frac{18}{84} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{84} = \frac{1}{3}$$

(iii) $$P(X=1 \mid N) = \frac{P(X=1, N)}{P(N)}$$

$$= \frac{P(N \mid X=1)\, P(X=1)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{45}{84} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{45}{84}$$

<u>ES. 2</u> $X_n \sim Exp\left\{\frac{1}{3^n}\right\} \implies Z_n \geq 0$ q.c.

$$Z_n = \min\{X_1 \ldots X_n\}$$

$z \geq 0$

$$F_{Z_n}(z) = P(\min(X_1 \ldots X_n) < z)$$

(i) X_n non converge poiché

$$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \to +\infty} 1 - e^{-\frac{x}{3^n}} = 0 \qquad \forall x \geq 0$$

(ii) $$F_{Z_n}(z) = 1 - P(\min(X_1 \ldots X_n) \geq z)$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{3^j} \cdot z}$$

$$= 1 - e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3^j} z}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) z}$$

poiché $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3^j} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{3^{l+1}} = \frac{1}{3} \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

$j-1=l$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1-e^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) z} \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1-e^{-\frac{z}{2}} & z > 0 \end{cases}$$

Quindi $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$