Cognome:.................. Nome:...

Probabilità - Prof. Beghin
I ESONERO - 11-11-2014
A

Esercizio n.1

Ho n chiavi (tutte diverse) di cui 1 sola apre il cancello. Se riesco ad aprire il cancello mi trovo di fronte la porta di casa con serratura a combinazione con 6 cifre. Mi ricordo soltanto che due cifre sono 0, due sono 4 e due sono 5, ma non ricordo l'ordine. Calcolare la probabilità:

i) che riesca ad aprire il cancello scegliendo una sola chiave a caso.

ii) che riesca ad entrare in casa dopo aver aperto anche il cancello scegliendo una chiave a caso.

iii) che riesca ad entrare in casa dopo aver aperto anche il cancello scegliendo due chiavi a caso senza ripetizione.

iv) che riesca ad entrare in casa dopo aver aperto anche il cancello scegliendo due chiavi a caso con ripetizione.

Esercizio n.2

Sia X una v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$ e sia

$$Y = \exp\left\{\frac{1}{X}\right\} - 1.$$

i) Calcolare la distribuzione di Y (con i due metodi conosciuti)

ii) Calcolare il

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\ln(Y+1)}\right).$$

SOLUZIONI

ES. 1

A = "apro il cancello scegliendo 1 chiave"

B = "apro la porta"

i) $P(A) = \frac{1}{n}$

ii) $P(B) = P(B \cap (A \cup A^c))$

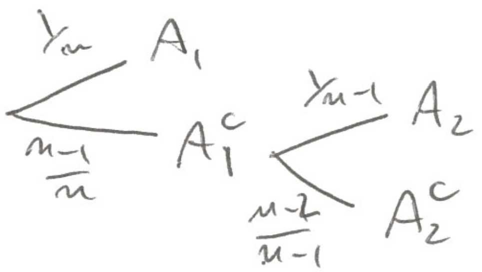
$= P(B \cap A) + \cancel{P(B \cap A^c)}^{=0}$

$= P(B|A)\, P(A)$

$= \frac{1}{n} \frac{1}{P_6^{2,2,2}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{6!}{2!\,2!\,2!}} = \frac{8}{720 \cdot n} = \frac{1}{90\, n}$

iii) A_i = "apro il cancello alla chiave i-esima"
$i = 1, 2$

$$P(B) = P\left[(B\cap A_1) \cup (B \cap A_1^c \cap A_2)\right]$$
$$= P(B\cap A_1) + P(B\cap A_1^c \cap A_2)$$
$$= \frac{1}{\rho_0 n} + P(B \mid A_1^c \cap A_2)\, P(A_1^c\cap A_2)$$
$$= \frac{1}{\rho_0 n} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\cancel{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n-1}} = \frac{2}{\rho_0 n}$$

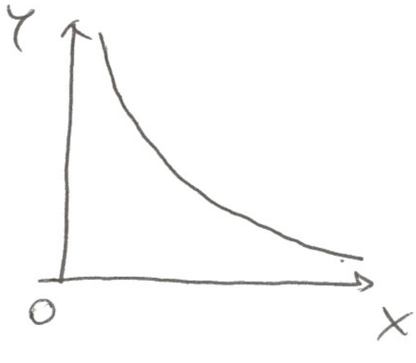


iv) $$\frac{1}{\rho_0 n} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\rho_0}\ \frac{2n-1}{n^2}$$

<u>ES. 2</u> $$Y = e^{\frac{1}{X}} - 1$$

$X \sim Exp(\lambda)$



ii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$$

$Y \in (0, +\infty)$ p.c.

$$F_Y(y) = P\left(e^{\frac{1}{X}} - 1 < y\right) \qquad y \geq 0$$

$$= P\left(e^{\frac{1}{X}} < y+1\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{X} < \ln(y+1)\right) \qquad \ln(y+1) > 0 \text{ poiché } y > 0$$

$$= P\left(X > \frac{1}{\ln(y+1)}\right)$$

$$= e^{-\lambda \frac{1}{\ln(y+1)}}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ e^{-\frac{\lambda}{\ln(y+1)}} & y > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(\ln(y+1))^2} \dfrac{e^{-\frac{\lambda}{\ln(y+1)}}}{y+1} & y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Nell'altro modo (applicando il Teorema)

$$y = g(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$$x = h(y) = g^{-1}(y) = \frac{1}{\ln(y+1)}$$

$$\frac{d}{dy} h(y) = \frac{-1}{(\ln(y+1))^2} \frac{1}{y+1}$$

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) |h'(y)|$$

$$= \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{\ln(y+1)}}}{(\ln(y+1))^2} \frac{1}{y+1} \qquad y \geq 0$$

ii) $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\ln(Y+1)}\right)$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\ln(Y+1))^3} \, e^{-\frac{\lambda}{\ln(Y+1)}} \, \frac{1}{Y+1} \, dY$$

$$z = \frac{1}{\ln(Y+1)} \qquad \frac{1}{z} = \ln(Y+1)$$

$$e^{\frac{1}{z}} = y+1 \qquad y = e^{\frac{1}{z}} - 1$$

$$dY = -\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} \frac{z^{\cancel{3}}}{z^2} \, \cancel{e^{\frac{1}{z}}} \, \frac{e^{-\lambda z}}{\cancel{e^{\frac{1}{z}}}} = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Infatti $\frac{1}{\ln(Y+1)} = X$

Cognome:.................... Nome:...

Probabilità - Prof. Beghin
I ESONERO - 11-11-2014
B

Esercizio n.1

Per partecipare ad un gioco a premi devo estrarre da 30 biglietti l'unico che mi permette di partecipare al gioco. Se riesco a partecipare al gioco potrò vincere solo se rispondo correttamente ad almeno 5 su 6 domande proposte. La probabilità che io risponda correttamente a ciascuna domanda (indipendentemente dalle altre) è p Calcolare la probabilità:

i) che riesca a partecipare al gioco scegliendo un solo biglietto dai 30.

ii) che riesca a vincere scegliendo un solo biglietto dai 30.

iii) che riesca a vincere scegliendo due biglietti a caso dai 30, con ripetizione.

iv) che riesca a vincere scegliendo due biglietti a caso dai 30, senza ripetizione.

Esercizio n.2

Sia X una v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$ e sia

$$Y = \exp\left\{\frac{1}{X} + 1\right\}.$$

i) Calcolare la distribuzione di Y (con i due metodi conosciuti)

ii) Calcolare il

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\ln(Y) - 1}\right).$$

SOLUZIONI

A = "partecipo al gioco scegliendo 1 bigl."

B = "vinco il gioco"

ES. 1

i) $P(A) = \frac{1}{30}$

ii) $P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A \cup A^c))$

$= P(B \cap A) + \cancel{P(B \cap A^c)}^{=0}$

$= P(B \mid A)\, P(A)$

$= \frac{1}{30} \cdot \left[P(\text{5 giuste}) + P(\text{6 giuste}) \right]$

$= \frac{1}{30}\left[\binom{6}{5} p^5 q + \binom{6}{6} p^6 \right]$

$$= \frac{1}{30}\left[6p^5 q + p^6\right] = \frac{6p^5 - 5p^6}{30}$$

ii) C = "vinco scegliendo 2 bigl. con rip."

$$P(B) = P(B|C)\,P(C)$$
$$= \frac{2}{30} \cdot (6p^5 - 5p^6)$$

iii) D = "vinco scegliendo 2 bigl. senza rip."

$$P(B) = P(B|D)\,P(D)$$

(per i passaggi vedi compito A)

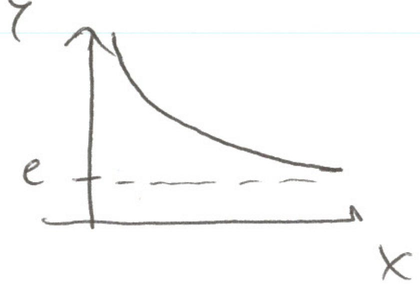
$$= \left(\frac{1}{30} + \frac{29}{30^2}\right)(6p^5 - 5p^6)$$
$$= \frac{30+29}{30^2}(6p^5 - 5p^6) = \frac{59}{900}(6p^5 - 5p^6)$$

ES. 2

$X \sim Exp(\lambda)$

$Y = e^{\frac{1}{X}+1}$ $\qquad Y \in (e, +\infty)$ P.C.

(i)



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le e \\ ? & y > e \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P\left(e^{\frac{1}{X}+1} < y\right) \qquad y > e$$
$$= P\left(\frac{1}{X} + 1 < \ln y\right)$$
$$= P\left(\frac{1}{X} < \ln y - 1\right)$$

$$= P\left(X > \frac{1}{\ln y - 1}\right)$$

$\ln y - 1 > 0$ poiché $y > e$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\ln y - 1}} \quad \Rightarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} e & y \le e \\ e^{-\frac{\lambda}{\ln y - 1}} & y > e \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{\lambda}{(\ln y - 1)^2} \frac{e^{-\frac{\lambda}{\ln y - 1}}}{y}$$

Applicando il Teorema si poteva ricavare come segue:

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{d}{dy} h(y) \right|$$

dove $g(x) = e^{\frac{1}{x}+1} = y$

e $h(y) = \frac{1}{\ln y - 1} = x$ $\qquad h'(y) = -\frac{1}{(\ln y - 1)^2} \frac{1}{y}$

$$f_Y(y) = \lambda \frac{e^{-\frac{\lambda}{\ln y - 1}}}{(\ln y - 1)^2} \frac{1}{y}$$

ii) $$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\ln(Y) - 1}\right)$$

$$= \lambda \int_e^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{\ln y - 1}}}{(\ln y - 1)^3} \frac{1}{y} \, dy$$

$$z = \frac{1}{\ln y - 1} \qquad \ln y - 1 = \frac{1}{z} \qquad y = e^{\frac{1}{z}+1} \qquad dy = -\frac{e^{\frac{1}{z}+1}}{z^2}$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda z}}{\cancel{z^2}} z^{\cancel{3}} \frac{\cancel{e^{\frac{1}{z}+1}}}{\cancel{e^{\frac{1}{z}+1}}} = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$