Cognome:.................... Nome:..
Corso di Laurea...................................... CFU..................

Probabilità
9-9-2014

Esercizio n.1
Si estrae *senza ripetizione* da un'urna di 40 palline numerate e colorate (in base al numero) nel modo seguente:

- Rosso dall'1 al 10
- Verde dall'11 al 20
- Giallo dal 21 al 30
- Blu dal 31 al 40

i) Calcolare la probabilità che in due estrazioni senza ripetizione il secondo numero estratto sia maggiore del primo.
ii) Calcolare la probabilità che in due estrazioni senza ripetizione il secondo numero estratto sia maggiore del primo, sapendo che il primo è Verde.
iii) Ricavare (senza eseguire i calcoli espliciti) la probabilità che estraendo 6 palline senza ripetizione almeno 3 siano dello stesso colore.

Esercizio n.2
Siano $X_1, ...X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con

$$\begin{aligned} P\{X_i &= a\} = p \\ P\{X_i &= 1/a\} = 1 - p = q, \end{aligned}$$

per $a > 0$.
i) Si calcoli la distribuzione della v.a. $Z_i = \log X_i$ ed il suo valore atteso.
ii) Si studi la convergenza della successione

$$Y_n = (X_1 \cdot ... \cdot X_n)^{1/n}.$$

SOLUZIONI
Es.1

- 1-10 R

- 11-20 V
- 21-30 G
- 31-40 B

Si indica con $X_i =$ "numero i-esima pallina estratta"
(i)

$$\begin{aligned} P(X_2 > X_1) &= P(X_2 > X_1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) + ... + P(X_2 > X_1 | X_1 = 39)P(X_1 = 39) \\ &= \frac{1}{40}\left[1 + \frac{38}{39} + \frac{37}{39} + ... + \frac{1}{39}\right] = \frac{1}{40}\left[1 + \frac{1}{39}\sum_{j=1}^{38} j\right] = \frac{1}{40}\left[1 + \frac{1}{39}\frac{38 \cdot 39}{2}\right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

oppure

$$P(X_2 > X_1) = \frac{\binom{40}{2}}{40 \cdot 39} = \frac{1}{2}$$

come era anche ovvio per simmetria.
(ii)

$$\begin{aligned} P(X_2 > X_1 | V) &= P(X_2 > X_1 | X_1 = 12)P(X_1 = 12) + ... + P(X_2 > X_1 | X_1 = 20)P(X_1 = 20) \\ &= \frac{1}{10}\left[\frac{29}{39} + \frac{28}{39} + ... + \frac{19}{39}\right] = \frac{1}{10}\frac{1}{39}\left[\sum_{j=1}^{29} j - \sum_{j=1}^{19} j\right] \\ &= \frac{1}{10}\frac{1}{39}\left[\frac{29 \cdot 30}{2} - \frac{19 \cdot 20}{2}\right] = 0,63 \end{aligned}$$

oppure

$$P(X_2 > X_1) = \frac{\binom{30}{2} - \binom{20}{2}}{10 \cdot 39} = 0,63$$

(iii) Chiamo $A_1 =$ "almeno 3 palline R", $A_2 =$ "almeno 3 palline V", $A_3 =$ "almeno 3 palline G", $A_4 =$ "almeno 3 palline B"

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4P(A_1) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j),$$

mentre tutte le altre intersezioni sono vuote. Quindi

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= 4P(A_1) - \binom{4}{2} P(A_i \cap A_j) \\ &= 4\sum_{j=3}^{6} \frac{\binom{10}{k}\binom{30}{6-k}}{\binom{40}{6}} - \binom{4}{2}\frac{\binom{10}{3}\binom{10}{3}}{\binom{40}{6}} \end{aligned}$$

Es.2

Si ha che

$$\log Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

con

$$Z_i = \begin{cases} \log a, & p \\ -\log a & q = 1-p \end{cases}.$$

Quindi

$$\mathbb{E}Z_i = p\log a - q\log a = (2p-1)\log a$$

e per la legge forte dei grandi numeri, data l'indipendenza delle v.a. coinvolte si ha la seguente convergenza quasi certa

$$\log Y_n \overset{q.c.}{\to} \mathbb{E}Z_i = (2p-1)\log a$$

Per il teorema della convergenza sotto funzione continua si ha quindi che

$$Y_n \overset{q.c.}{\to} e^{(2p-1)\log a} = a^{2p-1}.$$