Cognome:.. Nome:..

Probabilità e Laboratorio
Prof. L.Beghin

25-3-2014

Esercizio n.1

Due giocatori A e B disputano un incontro su tre games, ovvero vince l'incontro chi vince due games. Il giocatore A ha probabilità p di vincere ciascuno dei primi due games, indipendentemente l'uno dall'altro; se però si arriva al terzo game, la sua probabilità di vincerlo diventa $\overline{p}$. Calcolare

i) la probabilità che A vinca l'incontro al terzo game;

ii) la probabilità che l'incontro duri tre games, dato che lo vince A.

iii) il numero medio di games disputati.

Esercizio n.2

Sia X una v.a. normale di media 0 e varianza $t > 0$.

i) Si ricavi la distribuzione della v.a.

$$Y = \frac{1}{\sqrt{t}} X + a, \quad a \in \mathbf{R}.$$

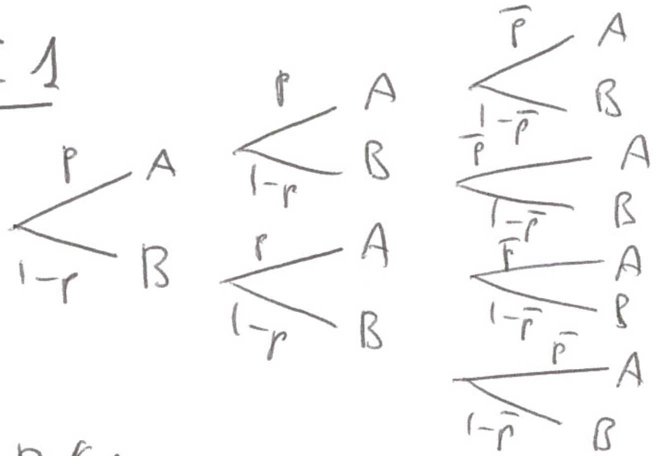
ii) Si studi la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2$$

dove le X_j sono v.a. indipendenti e tutte distribuite come X.

[Suggerimento: si ricorda che $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$]

ES. 1



i) $P\left(\begin{matrix}\text{A vince}\\ \text{al III°}\end{matrix}\right) = 2p(1-p)\bar{p}$

ii) $P\left(\begin{matrix}\text{arrivare}\\ \text{al III°}\end{matrix} \middle| \text{vince A}\right) = \dfrac{P\left(\text{vince A} \middle| \begin{matrix}\text{arrivare}\\ \text{al III°}\end{matrix}\right) P\left(\begin{matrix}\text{arrivare}\\ \text{al III°}\end{matrix}\right)}{P(\text{A vince})}$

$$= \frac{2\bar{p}\cancel{p}(1-p)}{p^{\cancel{2}} + 2\cancel{p}(1-p)\bar{p}} = \frac{2\bar{p}(1-p)}{p + 2\bar{p}(1-p)}$$

iii) $X =$ "n° partite disputate"

$X \in \{2,3\}$ q.c.

$P(X=2) = p^2 + (1-p)^2$

$P(X=3) = 2p(1-p)$

Infatti $p^2 + (1-p)^2 + 2p(1-p) = \cancel{2p^2} + 1 \cancel{-2p} + \cancel{2p} - \cancel{2p^2} = 1$

$$EX = 2p^2 + 2(1-p)^2 + 6p(1-p) = 2p^2 + 2 + 2p^2 - 4p + 6p - 6p^2$$
$$= 2 + 2p - 2p^2 = 2 + 2p(1-p)$$

Ed. 2

i) $X \sim N(0,t)$

$$Y = \frac{X}{\sqrt{t}} + e$$

Combinaz. lineare di Normali è ancora Normale con

$$\mathbb{E}Y = \frac{\mathbb{E}X}{\sqrt{t}} + e = e$$

$$\Rightarrow Y \sim N(e, 1)$$

$$V(Y) = \frac{1}{t} V(X) = 1$$

ii) $$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

X_i^2 sono v.a. i.i.d. con

$$\mathbb{E}(X_i)^2 = V(X) = t < \infty$$

$$\frac{x^2}{2t} = z \qquad x = \sqrt{2zt} \qquad dx = \frac{\sqrt{2t}\, dz}{2\sqrt{z}}$$

$$V(X_i^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^4 e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\, dx$$

$$= \frac{\cancel{2\sqrt{t}\sqrt{2}}}{\cancel{2\sqrt{2\pi t}}} \int_0^{+\infty} \frac{2^2 z^2 t^2}{\sqrt{z}} e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{4t^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} z^{\frac{3}{2}} e^{-z}\, dz = \frac{4t^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{4t^2}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\cancel{6}^{3} t^2}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2} < \infty$$

Quindi per la LFGN si ha che $Z_n \xrightarrow[q.c.]{P} t$