Cognome:............................... **Nome:**...................................
CFU:..
CORSO DI LAUREA...
Data orale:
☐ **11-6-2014**.................☐ **9-7-2014**.................

Probabilità
L.Beghin - G.Salinetti

6 giugno 2014

Esercizio 1
Si lancia un dado regolare per due volte. Determinare le seguenti probabilità:

1. che esca un solo numero pari
2. che escano due numeri pari
3. che al secondo lancio esca un numero maggiore del primo
4. che la somma dei due numeri sia pari a 6

Se i lanci effettuati sono $n \in N$, determinare la probabilità che il massimo numero uscito sia a per ogni $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Esercizio 2
Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda > 1$. Si calcoli la distribuzione ed il valor medio della variabile aleatoria definita come

$$Y = \beta e^X, \qquad \beta \geq 0.$$

Si studi la convergenza in distribuzione e quasi certa della seguente successione di v.a.

$$Z_n = \begin{cases} \frac{2\sqrt{n}Y}{1+\sqrt{n}}, & Y < n \\ Y^2, & Y \geq n \end{cases} .$$

Esercizio 1.

1. Il numero di coppie del tipo $(\#pari, \#dispari)$ e $(\#dispari, \#pari)$ è $9+9=18$. Il numero di coppie totali sono 36. Dunque
$$\Pr\{\text{un solo numero pari}\} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$
2. Il numero di coppie del tipo $(\#pari, \#pari)$ è 9 dunque
$$\Pr\{\text{ due numeri pari }\} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$
3. Se si visualizzano le possibili realizzazioni in una tabella a doppia entrata $6X6$ si ha che il numero di coppie è pari alla somma del numero degli elementi al di sopra (o al di sotto) della diagonale principale. Si ha dunque
$$\Pr\{\text{ al secondo lancio esca un numero maggiore del primo }\} = \frac{\sum_{i=1}^{5} i}{36} = \frac{(5\cdot 6)/2}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$
4. Le coppie la cui somma è sei sono: $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$. Si ha dunque che
$$\Pr\{\text{ somma dei due numeri usciti } = 6\} = \frac{5}{36}.$$
5. Si vuole trovare la probabilità dell'evento
$$E = \{\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) = a\}, \quad \forall a \in \{1,2,3,4,5,6\}$$
dove X_i, $i = 1, \cdots, n$ sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione (uniforme discreta)
$$\Pr\{X_i = a\} = \frac{1}{6}, \text{ for } a \in \{1,2,3,4,5,6\}, \forall i = 1, \cdots, n.$$
Sia $M_n = \max(X_i)$, $i = 1, \cdots, n$, abbiamo che
$$\Pr\{M_n \le a\} = \prod_{i=1}^{n} \Pr\{X_i \le a\} = \left(\frac{a}{6}\right)^n$$
e dunque
$$\Pr\{E\} = \Pr\{M_n = a\} = \Pr\{M_n \le a\} - \Pr\{M_n \le a-1\} = \left(\frac{a}{6}\right)^n - \left(\frac{a-1}{6}\right)^n.$$

Es. 2

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \qquad \lambda \geq 1$

$Y = \beta e^{X} \qquad \beta > 0 \qquad \Longrightarrow \quad Y \geq \beta$ P.C. (poiché $e^{X} \geq 1$)

per $y \geq \beta$

$$P(\beta e^{X} \leq y) = P\left(e^{X} < \frac{y}{\beta}\right) = P\left(X < \ln \frac{y}{\beta}\right) = \lambda \int_0^{\ln \frac{y}{\beta}} e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda \ln\left(\frac{y}{\beta}\right)} = 1 - e^{\ln\left(\frac{y}{\beta}\right)^{-\lambda}} = 1 - \left(\frac{\beta}{y}\right)^{\lambda}$$

$$\Longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq \beta \\ 1 - \left(\frac{\beta}{y}\right)^{\lambda} & y > \beta \end{cases}$$

per $y = \beta$ è 0
per $y \to +\infty$ è 1 OK

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \beta^{\lambda} \lambda y^{-\lambda-1} & y > \beta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

Si può ricavare anche con il teorema poiché $g(x) = \beta e^{x}$ è invertibile.

$$EY = \lambda \beta^{\lambda} \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{y^{\lambda}}\, dy = \lambda \beta^{\lambda} \left[\frac{y^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right]_{\beta}^{+\infty} \underset{\text{poiché } \lambda > 1}{=} \frac{\lambda \beta^{\lambda}}{\lambda - 1} \beta^{1-\lambda} = \frac{\lambda \beta}{\lambda - 1}$$

Per $n \to +\infty$ $\quad Z_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{n}\,Y(\omega)}{1+\sqrt{n}} & Y<n \\ Y^2 & Y \geq n \end{cases}$

converge, per ogni ω, a $2Y(\omega)$ quindi

$$Z_n \xrightarrow{p.c.} 2Y = Z$$

Per trovare la distribuz. di $2Y = Z$: $\qquad 2Y \geq 2\beta$ p.c. poiché $Y \geq \beta$

$$F_Z(z) = P(Z<z) = P(2Y<z)$$
$$= P\left(Y < \frac{z}{2}\right) = \begin{cases} 0 & z \leq 2\beta \\ 1-\left(\dfrac{\beta}{\frac{z}{2}}\right)^{\alpha} = 1-\left(\dfrac{2\beta}{z}\right)^{\alpha} & z > 2\beta \end{cases}$$

Quindi $\boxed{Z_n \xrightarrow[i.d.]{p.c.} Z}$ con distrib.

Per verificare direttamente la conv. i.d. si poteva fare:

$$P(Z_n<z) = P(Z_n<z,\ Y<n) + P(Z_n<z,\ Y\geq n)$$
$$= P\left(\frac{2\sqrt{n}\,Y}{1+\sqrt{n}} < z,\ Y<n\right) + P(Y^2<z,\ Y>n)$$

$$= P(-\sqrt{z}<Y<\sqrt{z},\ Y>n)$$
$$= P(n<Y<\sqrt{z})$$
$$\Downarrow$$
$$0 \text{ per } n \to +\infty$$

Quindi

$$P(Z_n<z) = P\left(Y < \frac{z(1+\sqrt{n})}{2\sqrt{n}},\ Y<n\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(Y<\frac{z}{2}\right) = \begin{cases} 0 & z \leq 2\beta \\ 1-\dfrac{\beta^{\alpha}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}} = 1-\left(\dfrac{2\beta}{z}\right)^{\alpha} & z > 2\beta \end{cases}$$