Cognome:.................. Nome:...

☐ **RECUPERO I ESONERO (svolgere solo Es.1 e 2, in due ore)**
☐ **RECUPERO II ESONERO (svolgere solo Es.2 e 3, in due ore)**
☐ **SCRITTO COMPLETO (svolgere Es.1,2 e 3, in tre ore)**

DATA ORALE: ☐ **28-1-2014** ☐ **20-2-2014**

Probabilità (Prof. Beghin)
23-1-2014

Esercizio n.1

In tre scatole ci sono 9 palline numerate così distribuite:

$$S_1 = \{1, 2, 3\} \qquad S_2 = \{4, 5, 6\} \qquad S_3 = \{7, 8, 9\}$$

Pesco a caso una pallina da una scatola scelta nel modo seguente: lancio due volte una moneta non truccata e

- estraggo la pallina da S_1 se ho ottenuto due teste
- estraggo la pallina da S_2 se ho ottenuto due croci
- estraggo la pallina da S_3 negli altri casi.

Una volta estratta la pallina memorizzo il numero corrispondente e reinserisco la pallina nella scatola da cui è stata estratta. Eseguo questa operazione (lanci della moneta ed estrazione della pallina) due volte. Calcolare le probabilità dei seguenti eventi:
A="il primo numero osservato è pari"
B= "il secondo numero osservato è dispari"
C="entrambi i numeri sono ≤ 5"
D="almeno uno è ≥ 9"
Come cambiano le probabilità di C e D se la seconda pallina è scelta dalla stessa scatola della prima (cioè senza rilanciare la moneta)?

Esercizio n.2

Siano X_1, X_2, X_3 tre variabili aleatorie indipendenti, aventi tutte distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$. Si definiscano le due nuove variabili aleatorie

$$Y = \frac{X_2}{X_1}$$

e

$$Z = X_3^2.$$

Trovare la distribuzione della v.a. doppia (Y, Z).

Esercizio n.3

Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. indipendenti e per ogni j sia X_j una v.a. esponenziale di parametro λ_j, con $\lambda_j = \frac{1}{2^j}$. Consideriamo inoltre la v.a. Z distribuita come una Gamma di parametri n e λ, indipendente dalle $X_j, j = 1, 2, ...n$.
(i) Si calcoli la distribuzione della seguente successione

$$Y_n = \frac{\min(X_1, ..., X_n)}{Z}$$

(ii) Si studi la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ per $n \to \infty$.

ES. 1

SOLUZIONI

(i) $P(A) = P(\text{pari}|S_1)\,P(S_1) + P(\text{pari}|S_2)\,P(S_2) + P(\text{pari}|S_3)\,P(S_3)$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

(ii) $P(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$

per l'indip. tra le estrazioni

(iii) $P(C) = \left(P(X\leq 5)\right)^2 = \left[1\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{25}{144}$

(iv) $P(D) = 2\cdot\left[0\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right] - \left[0\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right]^2$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

(v) Se non scelgo di nuovo la scatola → le estrazioni non sono più indipendenti.

$$P(C) = \left(P(X\leq 5|S_1)\right)^2\cdot P(S_1) + \left(P(X\leq 5|S_2)\right)^2 P(S_2) + \left(P(X\leq 5|S_3)\right)^2 P(S_3)$$

$$= 1^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + 0 = \frac{13}{36}$$

$$P(D) = P(X_1\geq 8 \cup X_2\geq 8) = 2P(X_1\geq 8) - P(X_1\geq 8, X_2\geq 8)$$

$$P(X_1=8) = P(X_1=8|S_3)\,P(S_3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X_1=8, X_2=8) = \left(P(X_1=8|S_3)\right)^2 P(S_3) = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow P(D) = \frac{2}{6} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

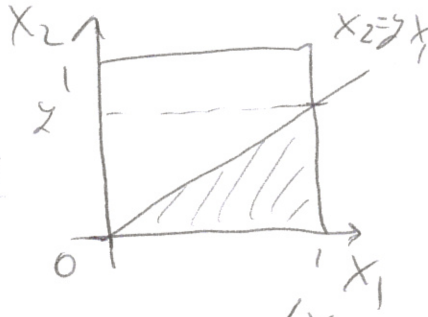
Es. 2

$Y = \frac{X_2}{X_1} \geq 0$ p.c.

per $y>0$

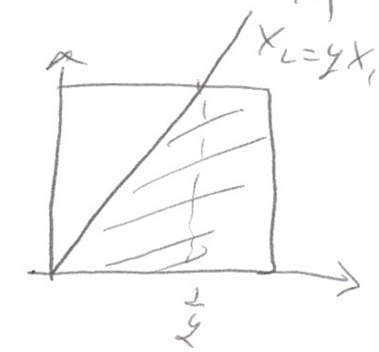
$$F_Y(y) = P\left(\frac{X_2}{X_1} < y\right) = P(X_2 < y X_1)$$

$y<1$



per $y<1$ $\quad = \frac{y}{2}$

$y>1$



per $y>1$ $\quad = 1 - \frac{1}{2y}$

$$\Rightarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{y}{2} & 0<y\leq 1 \\ 1-\frac{1}{2y} & y>1 \end{cases}$$

$F_Y(0) = 0 = F_Y(0^+)$

$F_Y(1) = \frac{1}{2} = F_Y(1^+)$

$\lim_{y\to+\infty} F_Y(y) = 1$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y\leq 0 \\ \frac{1}{2} & 0<y\leq 1 \\ \frac{1}{2y^2} & y>1 \end{cases}$$

$Z = X_3^2 \in (0,1)$ p.c.

$z\in(0,1)$ $\quad F_Z(z) = P(X_3^2 < z) = P(X_3 < \sqrt{z}) = \sqrt{z}$

$$\Rightarrow \quad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z\leq 0 \\ \sqrt{z} & 0<z\leq 1 \\ 1 & z>1 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}} & 0<z<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Poiché Y dipende solo, per def., da X_1 e X_2 e Z da X_3 allora Y e Z sono indipendenti quindi

$$f_{Y,Z}(y,z) = \begin{cases} 0 & \cancel{y\leq 0,\ z\leq 0} \text{ altrove} \\ \frac{1}{4\sqrt{z}} & 0<y<1 \text{ e } 0<z<1 \\ \frac{1}{4y^2\sqrt{z}} & y>1,\ 0<z<1 \end{cases}$$

Es. 3 $\qquad Y = \dfrac{\min(X_1, \dots X_n)}{Z} \qquad X_j \sim Exp\left(\frac{1}{2^j}\right)$

$Z \sim Gamma(n, \lambda)$

Pongo
$W_n = \min(X_1, \dots X_n)$ allora $W \geq 0$ p.c.

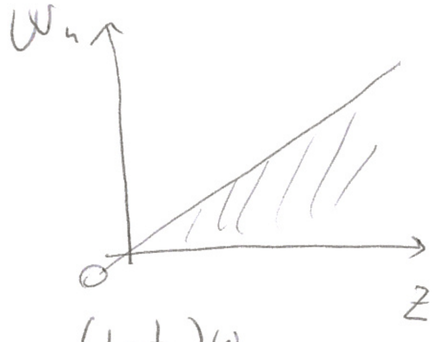
$w \geq 0$

$$F_{W_n}(w) = P(\min(X_1, \dots X_n) < w)$$
$$= 1 - P(\min(X_1 \dots X_n) \geq w)$$
$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} P(X_j \geq w)$$
$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{2^j} w} = 1 - e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} w}$$

ma $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \sum_{\substack{l=0 \\ j-1=l}}^{n-1} \frac{1}{2^{l+1}} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\cancel{1 - \frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^n}$

quindi $\quad F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ 1 - e^{-w\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)} & w > 0 \end{cases} \Rightarrow W \sim Exp\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

$Y_n = \dfrac{W_n}{Z} \qquad Y \geq 0$ p.c.



$$F_{Y_n}(y) = P\left(\frac{W_n}{Z} < y\right) = P(W_n < yZ)$$

$$= \int_0^{+\infty} dz \int_0^{zy} dw \, \frac{\lambda^n z^{n-1} e^{-\lambda z}}{\Gamma(n)} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) e^{-\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) w} \cancel{dw}$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} dz \, z^{n-1} e^{-\lambda z} \left[- \frac{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}}{\cancel{1 - \frac{1}{2^n}}} e^{-\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) w} \right]_0^{zy}$$

$$= 1 - \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} z^{n-1} e^{-\left[\lambda + y\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right] z} \, dz$$

$$= 1 - \frac{\lambda^n}{\left(\lambda + y\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)^n} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(n)}}{\cancel{\Gamma(n)}}$$

$$\Rightarrow F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - \left[\dfrac{\lambda}{\lambda + y\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}\right]^n & y > 0 \end{cases}$$

$F_{Y_n}(0) = 0 = F_{Y_n}(0^+)$

$\lim_{y \to +\infty} F_{Y_n}(y) = 1$

<u>ok</u>

per $n \to +\infty$ $\quad F_{Y_n}(y) \longrightarrow \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$

Quindi $\quad Y_n \xrightarrow[p]{d} 0$

La $F_{Y_n}(y)$ si poteva ricavare anche nel modo seguente (senza prima calcolare la distribuz. del min)

$$F_{Y_n}(y) = P\left(\frac{\min(X_1 \ldots X_n)}{Z} < y\right)$$

$$= P(\min(X_1 \ldots X_n) < Zy)$$

$$= 1 - P(\min(X_1, \ldots, X_n) \geq Zy)$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} P(X_j \geq Zy)$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^{+\infty} dz \int_{zy}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda z} z^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda_j e^{-\lambda_j x} \, dx \right\}$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^{+\infty} dz \, \frac{\lambda^n e^{-\lambda z} z^{n-1}}{\Gamma(n)} \left[-e^{-\lambda_j x} \right]_{zy}^{+\infty} \right\}$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} dz \, \frac{\lambda^n e^{-\lambda z} z^{n-1}}{\Gamma(n)} \, e^{-\lambda_j z y}$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} dz \, \frac{\lambda^n e^{-\lambda z} z^{n-1}}{\Gamma(n)} \, e^{-zy\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

me $\displaystyle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2^{l+1}} = \cancel{\frac{1}{2}} \, \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\cancel{1 - \frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^n}$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} dz \, \frac{\lambda^n \cancel{e^{-\lambda z}} z^{n-1}}{\Gamma(n)} \, e^{-z\left[\lambda + y\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right]}$$

$$= 1 - \frac{\lambda^n}{\left(\lambda + y\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right)^n}$$