Cognome:.................. Nome:..

Probabilità (Prof. G.Beghin)
17-2-2014

Esercizio n.1

Ho tre scatole: le scatole A e B contengono ciascuna sei palline numerate da 1 a 6. Nella scatola C ci sono invece cinque palline numerate da 1 a 5 e due palline con il numero 6.

Scelgo a caso da una delle tre scatole una pallina:

(i) Trovare la distribuzione di probabilità della variabile "numero sulla pallina estratta"

(ii) Se la pallina estratta è quella con il 6, qual'è la probabilità che sia stata scelta dalla scatola C

(iii) Se si estraggono senza ripetizione due palline dalla stessa scatola, qual'è la probabilità che escano due 6.

Esercizio n.2

La v.a doppia (X,Y) è uniformemente distribuita sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

(i) Calcolare le distribuzioni marginali di X e Y ed il $\mathbb{E}(Y-X)$.

(ii) Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = Y - X.$$

Esercizio n.3

Per ogni n naturale, sia

$$Y_n = n^{X_n},$$

(i) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}$ per $n \to \infty$, se X_n è una v.a. uniforme in $(0, 1/\ln n)$. [Si ricorda che $n^{1/\ln n} = e$]

(ii) Trovare il limite in distribuzione ed in probabilità della successione $\{Y_n\}$ per $n \to \infty$, se X_n è una v.a. esponenziale di parametro n.

Cognome:.................. Nome:...

Probabilità (Prof. G.Beghin)
17-2-2014

Esercizio n.1

Ho tre scatole: le scatole A e B contengono ciascuna sei palline numerate da 1 a 6. Nella scatola C ci sono invece cinque palline numerate da 1 a 5 e due palline con il numero 6.

Scelgo a caso da una delle tre scatole una pallina:

(i) Trovare la distribuzione di probabilità della variabile "numero sulla pallina estratta"

(ii) Se la pallina estratta è quella con il 6, qual'è la probabilità che sia stata scelta dalla scatola C

(iii) Se si estraggono senza ripetizione due palline dalla stessa scatola, qual'è la probabilità che escano due 6.

Esercizio n.2

La v.a doppia (X, Y) è uniformemente distribuita sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

(i) Calcolare le distribuzioni marginali di X e Y ed il $\mathbb{E}(Y-X)$.

(ii) Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Z = Y - X.$$

Esercizio n.3

Per ogni n naturale, sia

$$Y_n = n^{X_n},$$

(i) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}$ per $n \to \infty$, se X_n è una v.a. uniforme in $(0, 1/\ln n)$. [Si ricorda che $n^{1/\ln n} = e$]

(ii) Trovare il limite in distribuzione ed in probabilità della successione $\{Y_n\}$ per $n \to \infty$, se X_n è una v.a. esponenziale di parametro n.

SOLUZIONI

Es. 1 :

$P_1^A = \ldots = P_6^A = \frac{1}{6}$ $P_1^B = \ldots = P_6^B = \frac{1}{6}$

$P_1^C = \ldots = P_5^C = \frac{1}{7}$ $P_6^C = \frac{2}{7}$

$X =$ " n° pallina estratta "

$P(X=x) = P(X=x \mid A \cup B)\,P(A \cup B) + P(X=x \mid C)\,P(C)$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{63}$

per $x = 1, \ldots 5$

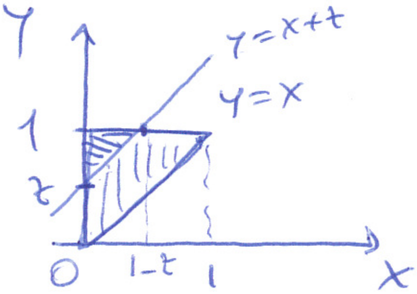
per $x=6$ $\quad P(X=x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{63}$

verifica $\quad \sum_{x=1}^{6} P(X=x) = 5\cdot\frac{10}{63} + \frac{13}{63} = 1$

(ii) $\quad P(C \mid X=6) = \dfrac{P(X=6 \mid C)\, P(C)}{P(X=6)} = \dfrac{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{13}{63}} = \frac{6}{13}$

(iii) $\quad P(6,6) = P(6,6 \mid A\cup B)\, P(A\cup B) + P(6,6 \mid C)\, P(C)$

$$= 0\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{63}$$



Es. 2

(i)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & y\in(0,1)\ \ 0<x<y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = 2\,\mathbb{1}_{\{0<y<1,\ 0<x<y\}} = 2\,\mathbb{1}_{\{0<x<1,\ x<y<1\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= 2\int_x^1 dy = 2(1-x)\,\mathbb{1}_{\{x\in(0,1)\}} \\ f_Y(y) &= 2\int_0^y dx = 2y\,\mathbb{1}_{\{y\in(0,1)\}} \end{aligned}}$$

$$E(Y-X) = E(Y)-E(X) = 2\int_0^1 y^2\,dy - 2\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$= \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(ii) $\quad Z = Y-X \in (0,1)$ q.c. $\qquad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z\le 0 \\ ? & 0<z\le 1 \\ 1 & z>1 \end{cases}$

poiché $Y \geq X$ q.c.

(vedi supporto)

$$P(Z<z) = P(Y-X<z)$$
$$= P(Y<z+X)$$

per $z\in(0,1)$
$$= 2\cdot \text{Area}(\text{Trapezio})$$
$$= 1-2\,\text{Area}(\text{Triangolo tratteggiato})$$
$$= 1-\cancel{2}\frac{(1-z)^2}{\cancel{2}} = \cancel{1}-(\cancel{1}+z^2-2z) = 2z-z^2$$

oppure
$$1-\int_z^1 dy\int_0^{y-z} 2\,dx = 1-2\int_z^1 dy\,(y-z)$$
$$= 1-2\left\{\left[\frac{y^2}{2}\right]_z^1 - z(1-z)\right\}$$
$$= \cancel{1}-(\cancel{1}-z^2)+2z(1-z) = z^2+2z-2z^2$$
$$= 2z-z^2$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z\le 0 \\ 2z-z^2 & 0<z\le 1 \\ 1 & >1 \end{cases}$$

$$\boxed{f_Z(z) = 2(1-z)\,\mathbb{1}_{\{z\in(0,1)\}}}$$

ES. 3

(i)
$$X_n \sim \text{Unif}\left(0,\frac{1}{\ln n}\right)$$
$$Y_n = n^{X_n}$$

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \ln n & 0<x<\frac{1}{\ln n} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ x\ln n & 0<x\le\frac{1}{\ln n} \\ 1 & x>\frac{1}{\ln n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_n \in \left(1, n^{\frac{1}{\ln n}}\right) = (1,e) \text{ q.c.}$$

$$P(Y_n<y) = P(n^{X_n}<y)$$
$$= P(X_n \ln n < \ln y)$$

$\ln n \geq 0$
$$= P\left(X_n<\frac{\ln y}{\ln n}\right) = F_{X_n}\left(\frac{\ln y}{\ln n}\right)$$

poiché $\frac{\ln y}{\ln n} < 1$ $\quad$ se $\ln y < \ln n$

ma $y < e \Rightarrow \ln y < 1$

$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \ln y < \ln n$

$$P(Y_n < y) = \cancel{\ln n} \cdot \frac{\ln y}{\cancel{\ln n}}$$

$$\Rightarrow F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \ln y & 1 < y \leq e \\ 1 & y > e \end{cases} \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_Y(y) \text{ con la stessa distribuz.}$$

$$\boxed{Y_n \stackrel{d}{=} Y} \quad \text{con} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 1 < y \leq e \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(c) $X_n \sim \text{Exp}(n)$ $\qquad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-nx} & x > 0 \end{cases}$

$Y_n = n^{X_n} \in (1, +\infty)$ q.c.

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = F_{X_n}\left(\frac{\ln y}{\ln n}\right) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - e^{-n \frac{\ln y}{\ln n}} & y > 1 \end{cases}$$

$$F_{Y_n}(y) \xrightarrow{n \to +\infty} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow[P]{d} Y \stackrel{q.c.}{=} 1}$$