Cognome:............................... Nome:...................................

Probabilità

-

Prof. L.Beghin

APPELLO STRAORDINARIO (B)

-

13-11-2013

Esercizio 1 (senza ripet.)

Tizio vuole viaggiare e deve selezionare due località in cui recarsi nel prossimo anno, estraendoli a sorte da una lista di n luoghi, che ha precedentemente stilato. Questi n luoghi erano stati da lui scelti a caso (con ripetizone) dall'atlante, in cui supponiamo ci sia la stessa probabilità di pescare una località dell'emisfero settentrionale o una di quello meridionale.

Se le due località selezionate risultano essere entrambe nell'emisfero nord,

i) calcolare la probabilità che tutte le n località nella lista fossero nell'emisfero nord.

ii) Cosa cambierebbe se le due località fossero selezionate con ripetizione?

Esercizio 2

Siano $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti e con densità

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ e^{-x+1}, & x > 1 \end{cases}, \qquad i = 1, 2, ...n.$$

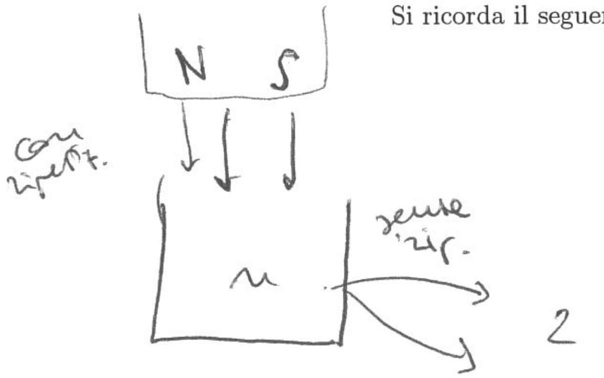
Studiare la convergenza della successione

$$Y_n = [\min\{X_1, ..., X_n\}]^n$$

per $n \to \infty$.

Si ricorda il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1) = \ln x.$$



<u>Es. 1</u>. $$P(n \text{ emisf. N} \mid 2N) = \frac{\overbrace{\cancel{P(2N \mid n \text{ emisf. N})}}^{=1} \, P(n \text{ emisf. N})}{P(2N)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^n}}{P(2N)}$$

$$P(2N) = P(2N, \Omega) = P\left(2N, \bigcup_{j=1}^{n} \text{"}j \text{ ammf. } N\text{"}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P\left(2N \,\middle|\, \overset{j}{\text{ammf. } N}\right) P\left(\overset{j}{\text{ammf. } N}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P\left(2N \,\middle|\, \overset{j}{\text{ammf. } N}\right) \binom{n}{j} \frac{1}{2^n}$$

(i) Se le 2 località sono estratte senza rip.

$$P(2N) = \sum_{j=2}^{n} \frac{\binom{j}{2}\cancel{\binom{n-j}{0}}}{\binom{n}{2}} \frac{1}{2^n}\binom{n}{j}$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \frac{\frac{\cancel{j!}}{\cancel{2!}(j-2)!}}{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{2!}(n-2)!}} \frac{1}{2^n} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{j!}(n-j)!}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=2}^{n} \binom{n-2}{j-2} = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-2}{r} 1^r 1^{n-2-r}$$

per il Teorema binomiale $= \frac{1}{2^n} (1+1)^{n-2} = \frac{1}{2^n} 2^{n-2}$

$$\Longrightarrow P\left(\overset{n \text{ ammf}}{N} \,\middle|\, 2N\right) = \frac{\cancel{\frac{1}{2^n}}}{\cancel{\frac{1}{2^n}} 2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

(ii) Se le 2 località sono scelte con rip.

$$P(2N) = \sum_{j=1}^{n} P\left(2N \,\middle|\, \overset{j}{\text{ammf } N}\right) \binom{n}{j} \frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \binom{n}{j} \frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^2} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{1}{2^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j\,(n-1)!}{n\,(n-j)!\,(j-1)!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow P\left(\begin{smallmatrix} x \text{ emis} \\ N \end{smallmatrix} \middle| 2N \right) = \frac{\cancel{\frac{1}{2^n}}}{\cancel{\frac{1}{2^n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \binom{n-1}{j-1}}$$

$$= \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} j \binom{n-1}{j-1}}$$

<u>Es. 2</u>

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y<1 \\ 1-e^{n(1-y^{1/n})} & y>1 \end{cases}$$

Infatti è

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n<y) = P\left(\left(\min(X_1 \dots X_n)\right)^n < y\right)$$

$$= P\left(\min(X_1 \dots X_n) < y^{1/n}\right)$$

$$= 1 - P\left(\min(X_1 \dots X_n) > y^{1/n}\right)$$

$$= 1 - \left(P(X_i > y^{1/n})\right)^n$$

$$= 1 - \left(\int_{y^{1/n}}^{+\infty} e^{-x+1}\,dx\right)^n$$

$$= 1 - \left(e\left[-e^{-x}\right]_{y^{1/n}}^{+\infty}\right)^n$$

$$= 1-\left(e^{1-y^{1/n}}\right)^n = 1-e^{-n(y^{1/n}-1)}$$

Tenendo conto del limite seguito si ha

$$F_{Y_n}(y) \longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<1 \\ 1-e^{-\ln y} = 1-\frac{1}{y} & y>1 \end{cases}$$

poiché $n(y^{1/n}-1) \to \ln y$. Quindi $Y_n \xrightarrow{d} Y$ con f.r.

Cognome:.............................. Nome:...................................

Probabilità

-

Prof. L.Beghin

I ESONERO (B)

-

13-11-2013

Esercizio 1

Il peso di un bimbo alla nascita per i maschi e le femmine è costituito rispettivamente dalle due variabile aleatorie, assolutamente continue, X e Y. Supponiamo che esse abbiano funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ cx^3, & 0 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

e

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ ky^2, & 0 < y \leq 3 \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

i) Determinare le costanti c e k.

ii) Calcolare le rispettive funzioni di densità.

iii) Per quale dei due sessi è più probabile che il neonato superi i 2 Kg.

iv) Se si osserva che un neonato pesa più di 2 Kg, con che probabilità si tratterà di una femmina, se si suppone che il rapporto tra maschi e femmine alla nascita sia di 3 a 4.

Esercizio 2

Tizio vuole viaggiare e deve selezionare due località in cui recarsi nel prossimo anno, estraendoli a sorte da una lista di n luoghi che ha precedentemente stilato. Questi n luoghi erano stati da lui scelti a caso (con ripetizone) dall'atlante, in cui supponiamo ci sia la stessa probabilità di pescare una località dell'emisfero settentrionale o una di quello meridionale.

Se le località scelte risultano essere entrambe nell'emisfero nord,

i) calcolare la probabilità che tutte le n località nella lista fossero nell'emisfero nord.

ii) Cosa cambierebbe se le due località fossero selezionate con ripetizione?

<u>Es. 1</u> (i) $F_X(3) = c\,3^3 = 27c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{27} = 0{,}04$

$F_Y(3) = k\,3^2 = 9k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9} = 0{,}1$

(ii) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} = 0{,}12\,x^2 & x \in (0,3) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9} y = 0,2 y & y \in (0,3) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(iii) $P(X>2) = 1 - 0,04 \cdot 2^3 = 0,68 = \frac{19}{27}$ è più prob. per i maschi

$P(Y>2) = 1 - 0,1 \cdot 2^2 = 0,6 = \frac{5}{9}$

(iv) $$P(\underbrace{F}_{\text{femmina}} \mid \underbrace{Z>2}_{\text{peso delle mosche}}) = \frac{P(Z>2 \mid F)\, P(F)}{P(Z>2)}$$

$$= \frac{P(Z>2 \mid F)\, P(F)}{P(Z>2 \mid F)\, P(F) + P(Z>2 \mid M)\, P(M)}$$

$$= \frac{P(Y>2)\, P(F)}{P(Y>2)\, P(F) + P(X>2)\, P(M)}$$

$$= \frac{0,6 \cdot \frac{4}{\cancel{7}}}{0,6 \cdot \frac{4}{\cancel{7}} + 0,68 \cdot \frac{3}{\cancel{7}}} = \frac{2.4}{2.4 + 2.04} = 0,54$$

<u>Es. 2</u> Vedi APPELLO STRAORDINARIO

Cognome:................................ Nome:....................................

Probabilità

-

Prof. L.Beghin

I ESONERO (A)

-

13-11-2013

Esercizio 1

Il pubblico di una trasmissione televisiva è costituito da n persone scelte a caso (con ripetizione) dalla popolazione di una città, formata in egual misura da donne e da uomini. Durante la trasmissione si selezionano dal pubblico (senza ripetizione) 2 persone a cui dare un premio ed esse risultano essere due donne.

i) Calcolare la probabilità che il pubblico sia composto da sole donne.

ii) Che cosa cambierebbe se le due persone fossero selezionate con ripetizione?

Esercizio 2

Il peso di un bimbo alla nascita per i maschi e le femmine è costituito rispettivamente dalle due variabile aleatorie, assolutamente continue, X e Y. Supponiamo che esse abbiano funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ kx^3, & 0 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

e

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ cy^2, & 0 < y \leq 3 \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

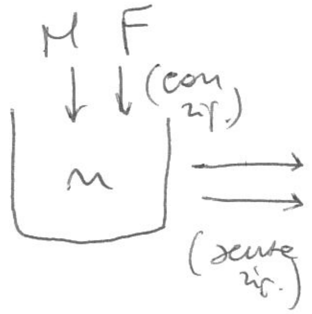
i) Determinare le costanti k e c.

ii) Calcolare le rispettive funzioni di densità.

iii) Per quale dei due sessi è più probabile che il neonato superi i 2 Kg?

iv) Se si osserva che un neonato pesa più di 2 Kg, con che probabilità si tratterà di una femmina, se si suppone che il rapporto tra maschi e femmine alla nascita sia di 4 a 5?

Es. 1



$$P\left(\overset{n}{\text{donne}} \,\middle|\, \overset{2}{\text{donne}}\right) = \frac{\overbrace{P\left(\overset{2}{\text{donne}} \,\middle|\, \overset{n}{\text{donne}}\right)}^{=1} P\left(\overset{n}{\text{donne}}\right)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(\overset{2}{\text{donne}} \,\middle|\, \overset{j}{\text{donne}}\right) P\left(\overset{j}{\text{donne}}\right)}$$

(i) se 2 persone sono scelte senza rip. il denom. è

$$\sum_{j=2}^{n} P(2D \mid jD)\, P(jD)$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \frac{\binom{j}{2}\binom{n-j}{0}}{\binom{n}{2}} \frac{1}{2^n}\binom{n}{j} = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-2}$$

per i passaggi vedi compito B

$$\Rightarrow P(nD \mid 2D) = \frac{\cancel{\frac{1}{2^n}}}{\cancel{\frac{1}{2^n}}\, 2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

(ii) se 2 persone sono scelte con rip. il denom. è

$$\sum_{j=1}^{n} P(2D \mid jD) \cdot \frac{1}{2^n}\binom{n}{j}$$ (per i passaggi vedi compito B)

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \binom{n-1}{j-1}$$

$$\Rightarrow P(nD \mid 2D) = \frac{\cancel{\frac{1}{2^n}}}{\cancel{\frac{1}{2^n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n}\binom{n-1}{j-1}} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} j \binom{n-1}{j-1}}$$

<u>Es. 2</u> vedi compito B

(i) $k = 0{,}0\bar{4} = \frac{1}{27}$

$c = 0{,}\bar{1} = \frac{1}{9}$

(ii) $P(X>2) = \frac{19}{27} = 0{,}\bar{7}$

$P(Y>2) = \frac{5}{9} = 0{,}\bar{5}$

(iii) $$P(F \mid Z>2) = \frac{P(Y>2)\,\frac{5}{9}}{P(Y>2)\,\frac{5}{9} + P(X>2)\,\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{0{,}\bar{5} \cdot 0{,}\bar{5}}{0{,}\bar{5} \cdot 0{,}\bar{5} + 0{,}\bar{7}\;\; 0{,}\bar{4}} = \frac{0{,}3}{0{,}31 + 0{,}30} = 0{,}49$$