Cognome:.. Nome:..

Probabilità
Prof. Beghin
8-7-2013

Esercizio 1

In una popolazione ogni particella, dopo un secondo di vita, si disintegra e genera

- 0 particelle con probabilità 1/4
- 1 particella con probabilità 1/2
- 2 particelle con probabilità 1/4.

Indichiamo con X_j il numero di particelle presenti dopo j secondi e ipotizziamo che:

- il numero di figlie di ogni particella sia indipendente da quello di tutte le altre;
- $X_0 = 1$ (si comincia con una sola particella).

Calcolare $P(X_2 = 0)$ e $P(X_1 = 2|X_2 = 1)$.

Esercizio 2

Siano $X_1, ..., X_n$ variabili casuali indipendenti, distribuite come esponenziali di parametro n^α. Si studi la convergenza in distribuzione della successione

$$Y_n = nX_n^r, \qquad r > 0,$$

al variare di α.

SOLUZIONI

ES. 1

i) $P(X_2 = 0) = P\left(X_2 = 0, \bigcup_{j=0}^{2} (X_1 = j)\right)$

$= \sum_{j=0}^{2} P(X_2 = 0 | X_1 = j)\, P(X_1 = j)$

$P(X_1 = 0) = \frac{1}{4}$ $\qquad P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$

$P(X_2 = 0 | X_1 = j) = \left(\frac{1}{4}\right)^j$

$\Rightarrow P(X_2 = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{64}$

ii) $P(X_1=2 \mid X_2=1) = \dfrac{P(X_2=1 \mid X_1=2)\, P(X_1=2)}{\sum_{j=0}^{2} P(X_2=1 \mid X_1=j)\, P(X_1=j)}$

$P(X_2=1 \mid X_1=0) = 0$

$P(X_2=1 \mid X_1=1) = \frac{1}{2}$

$P(X_2=1 \mid X_1=2) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad P(X_1=2 \mid X_2=1) = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\cancel{0 \cdot \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$

<u>ES. 2</u> $\quad Y_n = n X_n^r \qquad X_n \sim Exp(n^\alpha)$ indip $\qquad r>0$

$\Rightarrow \quad Y_n \in (0, +\infty)$ q.c.

$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$

$y>0$

$F_{Y_n}(y) = P(n X_n^r < y) = P\left(X_n < \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{r}}\right)$

$= 1 - e^{-n^{\alpha - \frac{1}{r}} y^{1/r}} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \alpha > \frac{1}{r} \\ 1 - e^{-y^{\frac{1}{r}}} & \alpha = \frac{1}{r} \\ 0 & \alpha < \frac{1}{r} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} Y_n \xrightarrow[p]{d} 0 & \alpha > \frac{1}{r} \\ Y_n \xrightarrow{d} Y & \alpha = \frac{1}{r} \\ Y_n \cancel{\xrightarrow{d}} & \alpha < \frac{1}{r} \end{cases}$ dove Y ha $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-y^{1/r}} & y > 0 \end{cases}$